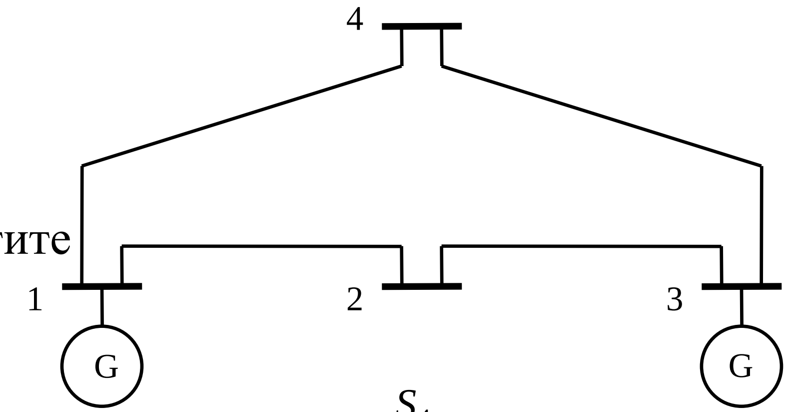
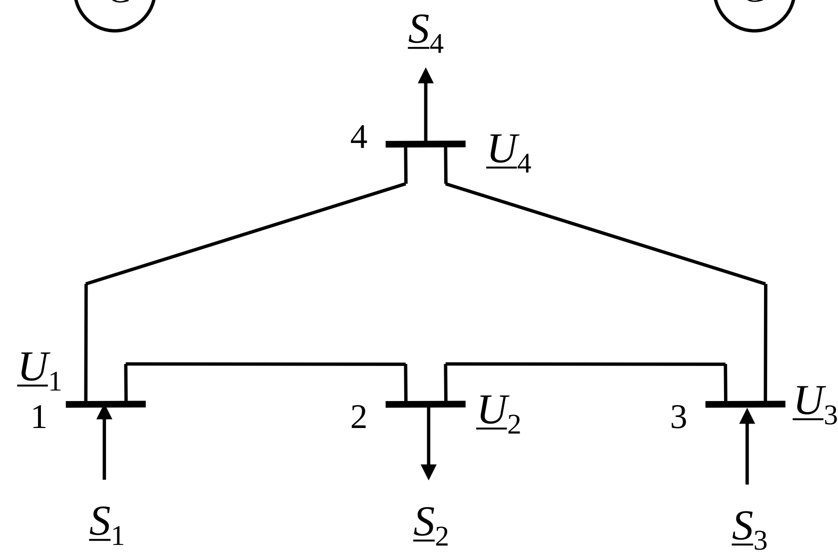
ОПШТИ МЕТОДИ ЗА ПРЕСМЕТКА НА НАПОНИ НА ЈАЗЛИТЕ

- Моделирање на елементите од ЕЕС
  - водови и трансформатори со π-заменски шеми
  - потрошувачите и генераторите со инјектирани моќности
- инјектирана (комплексна) моќност во еден јазол е разлика помеѓу моќностите на изворите и моќностите на потрошувачите приклучени на тој јазол



$$\underline{S}_k = \underline{S}_{k_{\text{генератори}}} - \underline{S}_{k\,\text{потрошувачи}} = P_k + \mathrm{j}Q_k$$

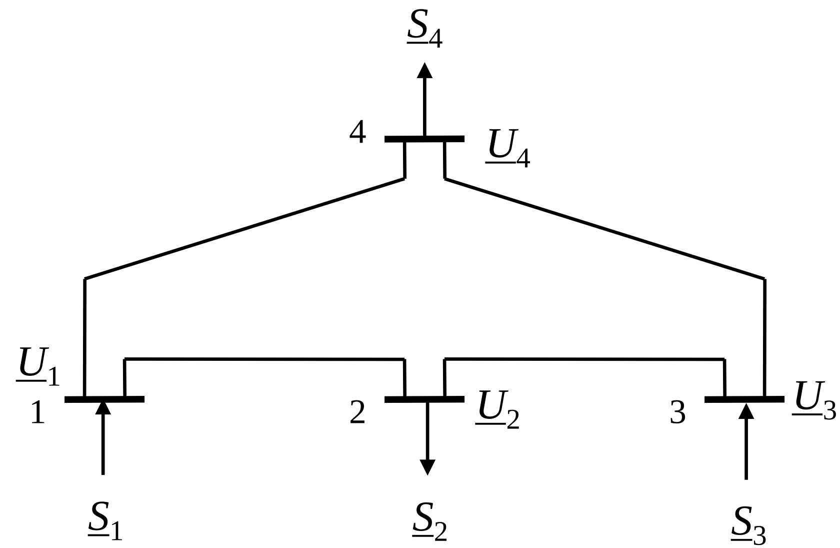


- Кон секој јазол од ЕЕС се придружени по две комплексни големини
  - комплексен напон $\underline{U}_k = U_k\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta k}$
    - модул (ефективна вредност) на напонот U_k
    - фазен агол на напонот θ_k
  - комплексна инјектирана моќност $\underline{S}_k = P_k + \mathrm{j}Q_k$
    - инјектирана активна моќност P_k
    - инјектирана реактивна моќност Q_k
- Две од претходните големини се познати однапред, додека останатите две се добиваат како резултат од пресметките

$$\underline{\boldsymbol{Y}} \cdot \underline{\boldsymbol{U}} = \underline{\boldsymbol{I}} \qquad \underline{\boldsymbol{Z}} \cdot \underline{\boldsymbol{I}} = \underline{\boldsymbol{U}}$$

ОПШТИ МЕТОДИ ЗА ПРЕСМЕТКА НА НАПОНИ НА ЈАЗЛИТЕ

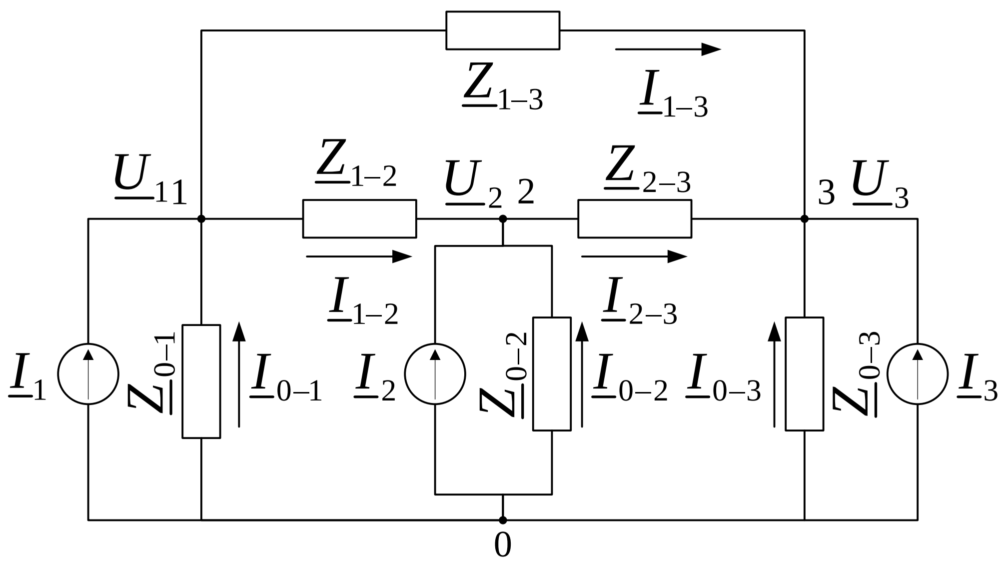
– напон $\underline{U}_k = U_k\, e^{j\theta k}$
  - модул (ефективна вредност) на напонот U_k
  - фазен агол на напонот θ_k
– инјектирана моќност $\underline{S}_k = P_k + jQ_k$
  - инјектирана активна моќност P_k
  - инјектирана реактивна моќност Q_k



- Три групи јазли
  - јазол со познат напон *(slack bus; slack node; slack)*
    - непознати - инјектираните активна и реактивна моќност во јазолот
  - PQ јазли со познати инјектирана активна (P) и реактивна моќност (Q)
    - непознати - комплексниот напон (ефективната вредност и фазниот агол)
  - PU јазли со позната инјектирана активна моќност (P) и ефективна вредност на напонот (U) - јазли со контролиран напон
    - непознати - фазниот агол на напонот и инјектираната реактивна моќност во јазолот
    - дополнителни податоци за овој тип јазли:
      - најголемата и најмалата вредност на инјектираната реактивна моќност која што техничките средства (генератори, компензатори и синхрони мотори) можат да ја инјектираат во јазолот

СИСТЕМИ НЕЛИНЕАРНИ РАВЕНКИ

$$\underline{Z}_{i-j} = R_{i-j} + jX_{i-j}$$



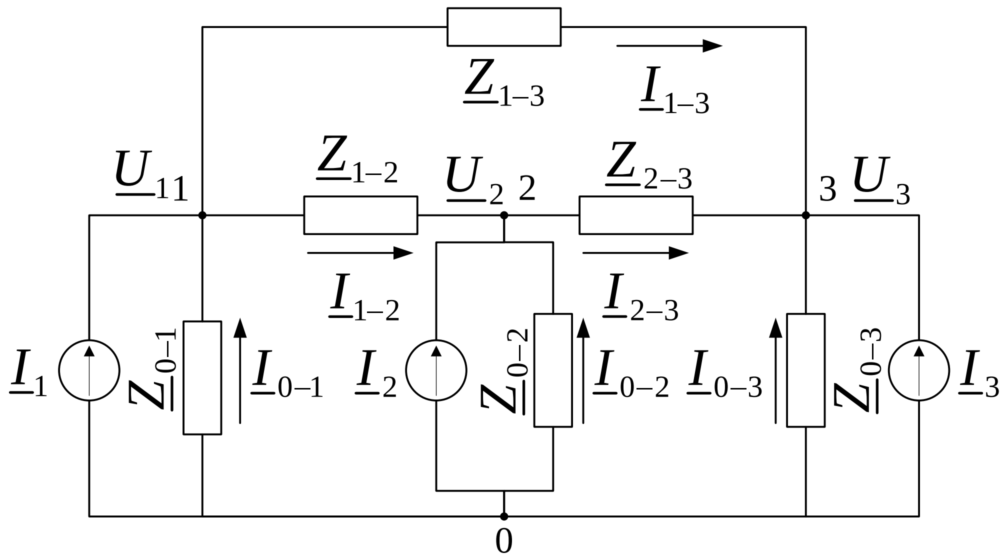
$$\underline{I}_1 = -\underline{I}_{0-1} + \underline{I}_{1-2} + \underline{I}_{1-3} = -\frac{\underline{U}_0 - \underline{U}_1}{\underline{Z}_{0-1}} + \frac{\underline{U}_1 - \underline{U}_2}{\underline{Z}_{1-2}} + \frac{\underline{U}_1 - \underline{U}_3}{\underline{Z}_{1-3}}$$

$$\underline{I}_2 = -\underline{I}_{0-2} - \underline{I}_{1-2} + \underline{I}_{2-3} = -\frac{\underline{U}_0 - \underline{U}_2}{\underline{Z}_{0-2}} - \frac{\underline{U}_1 - \underline{U}_2}{\underline{Z}_{1-2}} + \frac{\underline{U}_2 - \underline{U}_3}{\underline{Z}_{2-3}}$$

$$\underline{I}_3 = -\underline{I}_{0-3} - \underline{I}_{1-3} - \underline{I}_{2-3} = -\frac{\underline{U}_0 - \underline{U}_3}{\underline{Z}_{0-3}} - \frac{\underline{U}_1 - \underline{U}_3}{\underline{Z}_{1-3}} - \frac{\underline{U}_2 - \underline{U}_3}{\underline{Z}_{2-3}}$$

СИСТЕМИ НЕЛИНЕАРНИ РАВЕНКИ

- За ВН мрежи најчесто не се познати инјектираните струи, туку моќностите на потрошувачите и генераторите
  - најчесто, кај ВН мрежи, инјектираните моќности се константни и не зависат од напонот → **инјектираните струи не се константни**!



$$\underline{Z}_{i-j} = R_{i-j} + jX_{i-j}$$

$$\underline{S}_i = P_i + jQ_i$$

$$\underline{S}_i = \underline{U}_i \cdot \underline{I}_i^*$$

$$\underline{I}_i = \left(\frac{\underline{S}_i}{\underline{U}_i}\right)^*$$

$$\underline{I}_1 = -\underline{I}_{0-1} + \underline{I}_{1-2} + \underline{I}_{1-3} = -\frac{\underline{U}_0 - \underline{U}_1}{\underline{Z}_{0-1}} + \frac{\underline{U}_1 - \underline{U}_2}{\underline{Z}_{1-2}} + \frac{\underline{U}_1 - \underline{U}_3}{\underline{Z}_{1-3}}$$

$$\underline{I}_2 = -\underline{I}_{0-2} - \underline{I}_{1-2} + \underline{I}_{2-3} = -\frac{\underline{U}_0 - \underline{U}_2}{\underline{Z}_{0-2}} - \frac{\underline{U}_1 - \underline{U}_2}{\underline{Z}_{1-2}} + \frac{\underline{U}_2 - \underline{U}_3}{\underline{Z}_{2-3}}$$

$$\underline{I}_3 = -\underline{I}_{0-3} - \underline{I}_{1-3} - \underline{I}_{2-3} = -\frac{\underline{U}_0 - \underline{U}_3}{\underline{Z}_{0-3}} - \frac{\underline{U}_1 - \underline{U}_3}{\underline{Z}_{1-3}} - \frac{\underline{U}_2 - \underline{U}_3}{\underline{Z}_{2-3}}$$

СИСТЕМИ НЕЛИНЕАРНИ РАВЕНКИ

- Познат е напонот во еден од јазлите
  - да претпоставиме дека тоа е јазолот со реден број *n*

$$\underline{S}_i = P_i + jQ_i \qquad \underline{I}_i = \left(\frac{\underline{S}_i}{\underline{U}_i}\right)^* = \frac{P_i - jQ_i}{\underline{U}_i^*}$$

$$\left(\underline{Y}_{0-1} + \underline{Y}_{1-2} + \underline{Y}_{1-3}\right) \cdot \underline{U}_1 - \underline{Y}_{1-2} \cdot \underline{U}_2 - \underline{Y}_{1-3} \cdot \underline{U}_3 = \left(\frac{\underline{S}_1}{\underline{U}_1}\right)^*$$

$$-\underline{Y}_{1-2} \cdot \underline{U}_1 + \left(\underline{Y}_{0-2} + \underline{Y}_{1-2} + \underline{Y}_{2-3}\right) \cdot \underline{U}_2 - \underline{Y}_{2-3} \cdot \underline{U}_3 = \left(\frac{\underline{S}_2}{\underline{U}_2}\right)^*$$

$$-\underline{Y}_{1-3} \cdot \underline{U}_1 - \underline{Y}_{2-3} \cdot \underline{U}_2 + \left(\underline{Y}_{0-3} + \underline{Y}_{1-3} + \underline{Y}_{2-3}\right) \cdot \underline{U}_3 = \left(\frac{\underline{S}_3}{\underline{U}_3}\right)^*$$

$$\sum_{j=1}^{n} \underline{Y}_{ij} \cdot \underline{U}_j = \frac{P_i - jQ_i}{\underline{U}_i^*} \;, \; i = 1, 2, \cdots, n-1$$

СИСТЕМИ НЕЛИНЕАРНИ РАВЕНКИ

- Системите нелинеарни равенки се решаваат со итеративни методи
  - Гаус-Зајделов метод
  - Њутн-Рафсонов метод
- Напонот на јазлите во електричните мрежи (во нормални режими на работа) не отстапува многу од номиналниот напон на мрежата
  - како почетно решение за напоните (нулта итерација) се зема дека во сите јазли напонот е еднаков на номиналниот
- Процедурата кај Гаус-Зајделовиот метод е слична како и во случајот на итеративно решавање на СЛР

$$\sum_{j=1}^{n} \underline{Y}_{ij} \cdot \underline{U}_{j} = \frac{P_i - jQ_i}{\underline{U}_i^*} \ , i = 1, 2, \cdots, n-1$$

$$\sum_{j=1}^{i-1} \underline{Y}_{ij} \cdot \underline{U}_{j} + \underline{Y}_{ii} \cdot \underline{U}_{i} + \sum_{j=i+1}^{n} \underline{Y}_{ij} \cdot \underline{U}_{j} = \frac{P_i - jQ_i}{\underline{U}_i^*} \ , i = 1, 2, \cdots, n-1$$

$$\underline{U}_i^{(k)} = \frac{1}{\underline{Y}_{ii}} \left[\left(\frac{P_i + jQ_i}{\underline{U}_i^{(k-1)}} \right)^* - \sum_{j=1}^{i-1} \underline{Y}_{ij} \cdot \underline{U}_j^{(k)} - \sum_{j=i+1}^{n} \underline{Y}_{ij} \cdot \underline{U}_j^{(k-1)} \right] , i = 1, 2, \cdots, n-1$$

$$\underline{U}_i^{(0)} = \left(U_{\text{ном.}} + j0 \right) \ , i = 1, 2, \cdots, n-1$$

ГАУС-ЗАЈДЕЛОВ МЕТОД

- Итеративната постапка може да се смета дека е завршена ако во две последователни итерации напоните во јазлите не се промениле значително
  - најголемата апсолутната вредност на разликите на напоните во две последователни итерации треба да биде помала од бараната точност ε
    - најголемата вредност на прирастите на реалниот и имагинарниот дел од напоните на јазлите во две последователни итерации треба да биде помала од бараната точност ε
    - или најголемата апсолутна разлика на комплексните напони на јазлите во две последователни итерации треба да биде помала од бараната точност ε (овој критериум е нешто построг)
  - вообичаено, ε е околу 0.001% (10^{-5} релативни единици)

$$\underline{U}_i^{(k)} = \frac{1}{\underline{Y}_{ii}} \left[\left(\frac{P_i + jQ_i}{\underline{U}_i^{(k-1)}} \right)^* - \sum_{j=1}^{i-1} \underline{Y}_{ij} \cdot \underline{U}_j^{(k)} - \sum_{j=i+1}^{n} \underline{Y}_{ij} \cdot \underline{U}_j^{(k-1)} \right], \ i = 1, 2, \cdots, n-1$$

$$\Delta\underline{U}_i^{(k)} = \underline{U}_i^{(k)} - \underline{U}_i^{(k-1)} \ , \ i = 1, 2, \cdots, n-1$$

$$\underline{U}_i^{(k)} = \underline{U}_i^{(k-1)} + \Delta\underline{U}_i^{(k)} \ , \ i = 1, 2, \cdots, n-1$$

$$\max_{i=1,\cdots n-1} \frac{\left| \underline{U}_i^{(k)} - \underline{U}_i^{(k-1)} \right|}{\left| \underline{U}_i^{(k)} \right|} = \max_{i=1,\cdots n-1} \frac{\left| \Delta\underline{U}_i^{(k)} \right|}{\left| \underline{U}_i^{(k)} \right|} < \varepsilon$$

$$\cancel{\max_{i=1,\cdots n-1} \frac{\left| \left| \underline{U}_i^{(k)} \right| - \left| \underline{U}_i^{(k-1)} \right| \right|}{\left| \underline{U}_i^{(k)} \right|} < \varepsilon}$$

КАРАКТЕРИСТИКИ НА ГАУС-ЗАЈДЕЛОВ МЕТОД

- Спора конвергенција
  - бројот на математички операции во рамките на една итерација е релативно мал; но, и покрај тоа, вкупното време за пресметка е релативно големо
  - многу едноставен за програмирање и реализација
  - бројот на итерации расте со зголемување на бројот на независни јазли
  - постои можност за забрзување на конвергенцијата
    - факторот на забрзување $\underline{\alpha}$ најчесто е реален број во границите од 1.1 до 1.8; не може однапред да се каже која вредност за α ќе доведе до најмал број на итерации

$$\underline{U}_i^{(k)} = \underline{U}_i^{(k-1)} + \underline{\alpha} \cdot \Delta \underline{U}_i^{(k)} \ , \ i = 1, 2, \cdots, n-1$$

- Редоследот според кој се пресметуваат напоните е произволен и не мора да соодветствува со редните броеви на јазлите

$$\underline{U}_i^{(k)} = \frac{1}{\underline{Y}_{ii}} \left[\left(\frac{P_i + jQ_i}{\underline{U}_i^{(k-1)}} \right)^* - \sum_{j \in \alpha_{k-1};\, j \neq i} \underline{Y}_{ij} \cdot \underline{U}_j^{(k-1)} - \sum_{j \in \alpha_k;\, j \neq i} \underline{Y}_{ij} \cdot \underline{U}_j^{(k)} \right] , \ i = n, n-1, \cdots, 1; \ i \neq s$$

$$\underline{U}_i^{(k)} = \frac{1}{\underline{Y}_{ii}} \left[\left(\frac{P_i + jQ_i}{\underline{U}_i^{(k-1)}} \right)^* - \sum_{j=1;\, j \neq i}^{n} \underline{Y}_{ij} \cdot \underline{U}_j^{(k-1;k)} \right] , \ i = n, n-1, \cdots, 1; \ i \neq s$$

$$\underline{U}_i^{(k)} = \frac{1}{\underline{Y}_{ii}} \left[\left(\frac{P_i + jQ_i}{\underline{U}_i^{(k-1)}} \right)^* - \sum_{j=\mathrm{A};\, j \neq \mathrm{S}}^{\mathrm{Z}} \underline{Y}_{ij} \cdot \underline{U}_j^{(k-1;k)} \right] , \ i = \mathrm{A}, \mathrm{B}, \cdots, \mathrm{Z}; \ i \neq \mathrm{S}$$

ГАУС-ЗАЈДЕЛОВ МЕТОД

- јазолот со познат напон (*slack*) има реден број *s*
- за останатите јазли се познати инјектираните моќности (активни и реактивни), а непознати се комплексните напони (вкупно *n*-1 непознати комплексни напони) - јазли од типот PQ

$$\underline{\boldsymbol{Y}} \cdot \underline{\boldsymbol{U}} = \underline{\boldsymbol{I}} \longrightarrow \underline{I}_i = \sum_{l=1}^{n} \underline{Y}_{il} \cdot \underline{U}_l \; ; \; i = 1, \cdots, n \longrightarrow \underline{I}_i = \sum_{l=1}^{n} \underline{Y}_{il} \cdot \underline{U}_l \; ; \; i = 1, \cdots, n; \; i \neq s$$

$$\underline{U}_i = \frac{1}{\underline{Y}_{ii}} \cdot \left(\underline{I}_i - \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq i}}^{n} \underline{Y}_{il} \cdot \underline{U}_l \right) ; \; i = 1, \cdots, n; \; i \neq s$$

$$\underline{I}_i = \left(\frac{\underline{S}_i}{\underline{U}_i} \right)^* = \frac{P_i - \mathrm{j}Q_i}{\underline{U}_i^*}$$

$$\underline{U}_i = \frac{1}{\underline{Y}_{ii}} \cdot \left(\frac{P_i - \mathrm{j}Q_i}{\underline{U}_i^*} - \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq i}}^{n} \underline{Y}_{il} \cdot \underline{U}_l \right) ; \; i = 1, \cdots, n; \; i \neq s$$

Систем нелинеарни равенки по непознатите комплексни напони којшто може да се реши со Гаусовиот или Гаус-Зајделовиот метод

На почетокот на итеративниот процес претпоставуваме почетни вредности на напоните на јазлите; најчесто *flat start*, т.е. напоните на јазлите имаат ефективна вредност еднаква на 1 per unit (најчесто номинален напон) и фазен агол = 0

$$\underline{U}_i^{(0)} = 1{,}0 + \mathrm{j}0 \; ; \; i = 1, 2, \cdots, n; \; i \neq s$$

Гаус-зајделов метод

$$\underline{U}_i^{(\nu+1)} = \frac{1}{\underline{Y}_{ii}} \cdot \left(\frac{P_i - \mathrm{j}Q_i}{\left(\underline{U}_i^{(\nu)}\right)^*} - \sum_{\substack{l=1 \\ l\neq i}}^{n} \underline{Y}_{il} \cdot \underline{U}_l^{(\nu)} \right) \; ; \; i = 1, 2, \cdots, n; \; i \neq s$$

Гаусов метод

Гаус-Зајделов метод

$$\underline{U}_i^{(\nu+1)} = \frac{1}{\underline{Y}_{ii}} \cdot \left(\frac{P_i - \mathrm{j}Q_i}{\left(\underline{U}_i^{(\nu)}\right)^*} - \sum_{l=1}^{i-1} \underline{Y}_{il} \cdot \underline{U}_l^{(\nu+1)} - \sum_{l=i+1}^{n} \underline{Y}_{il} \cdot \underline{U}_l^{(\nu)} \right) ; \; i = 1,2,\cdots,n; \; i \neq s$$

Прирасти на комплексните напони

$$\Delta\underline{U}_i^{(\nu+1)} = \underline{U}_i^{(\nu+1)} - \underline{U}_i^{(\nu)} \; ; \; i = 1,\cdots,n; \; i \neq s$$

Критериуми за завршување на итеративниот процес ($e=10^{-5}$ p.u.)

$$\max_i \left\{ \left| \Delta\underline{U}_i^{(\nu+1)} \right| \right\} = \max_i \left\{ \left| \underline{U}_i^{(\nu+1)} - \underline{U}_i^{(\nu)} \right| \right\} \leq \varepsilon$$

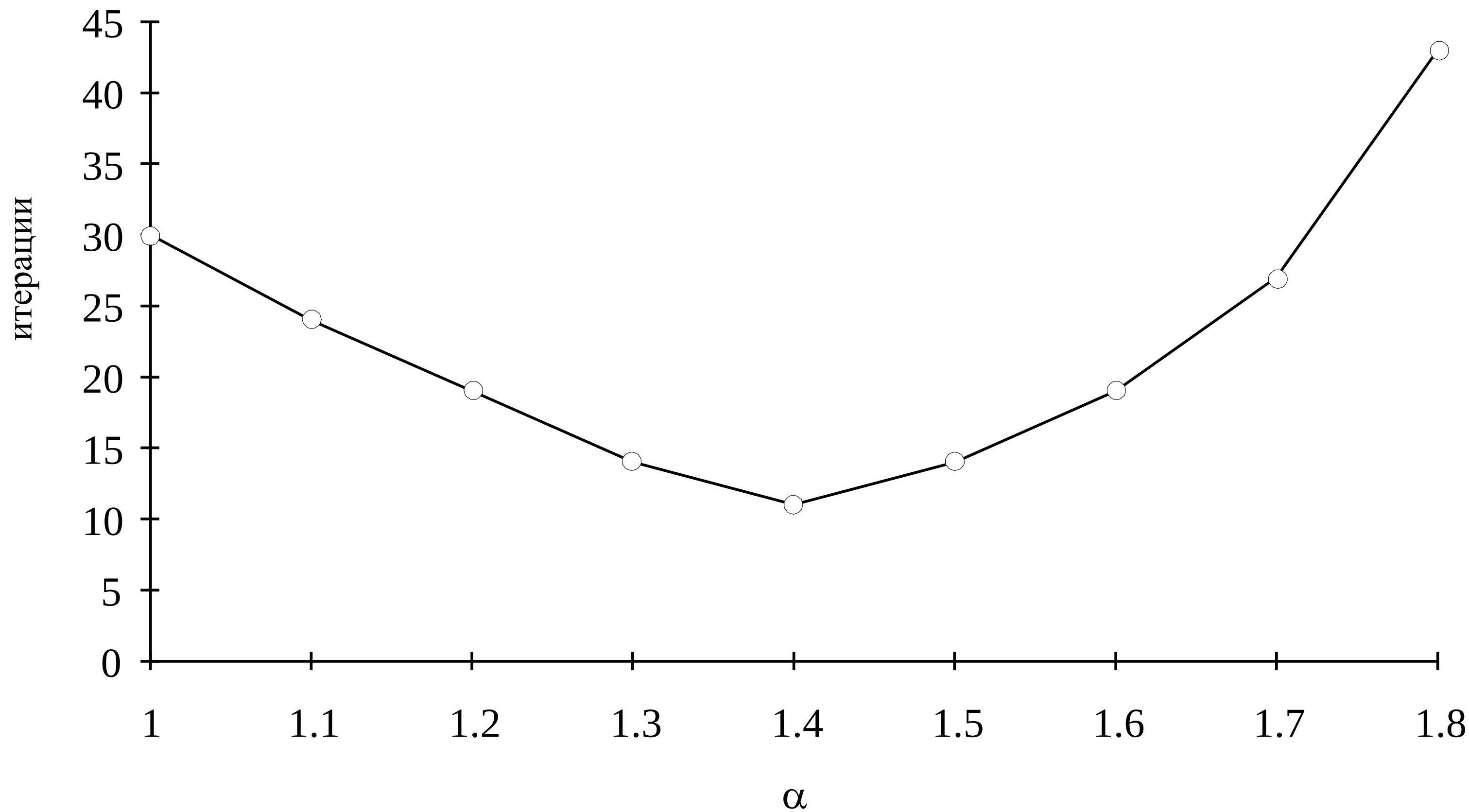
$$\max_i \left\{ \left| \mathrm{Re}\left(\Delta\underline{U}_i^{(\nu+1)} \right) \right| \right\} = \max_i \left\{ \left| \mathrm{Re}\left(\underline{U}_i^{(\nu+1)} - \underline{U}_i^{(\nu)} \right) \right| \right\} \leq \varepsilon$$

$$\max_i \left\{ \left| \mathrm{Im}\left(\Delta\underline{U}_i^{(\nu+1)} \right) \right| \right\} = \max_i \left\{ \left| \mathrm{Im}\left(\underline{U}_i^{(\nu+1)} - \underline{U}_i^{(\nu)} \right) \right| \right\} \leq \varepsilon$$

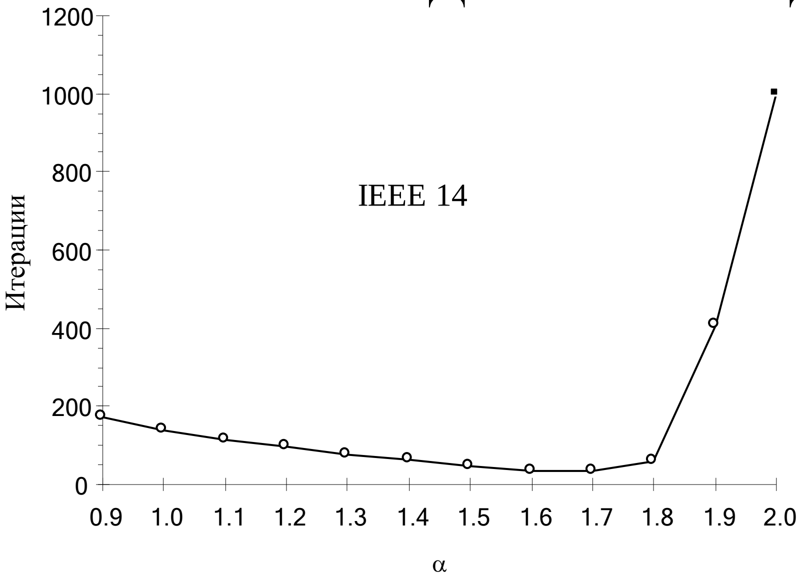
ГАУС-ЗАЈДЕЛОВ МЕТОД

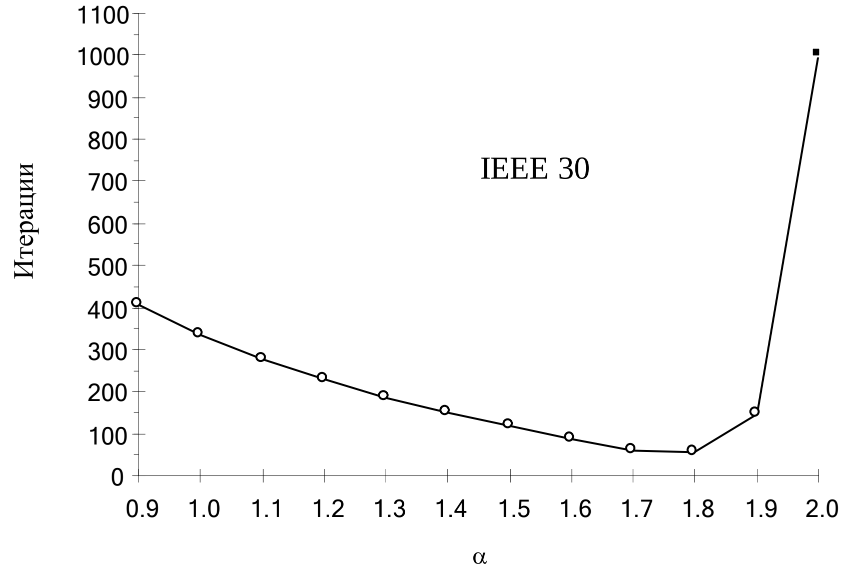
Забрзување на итеративниот процес

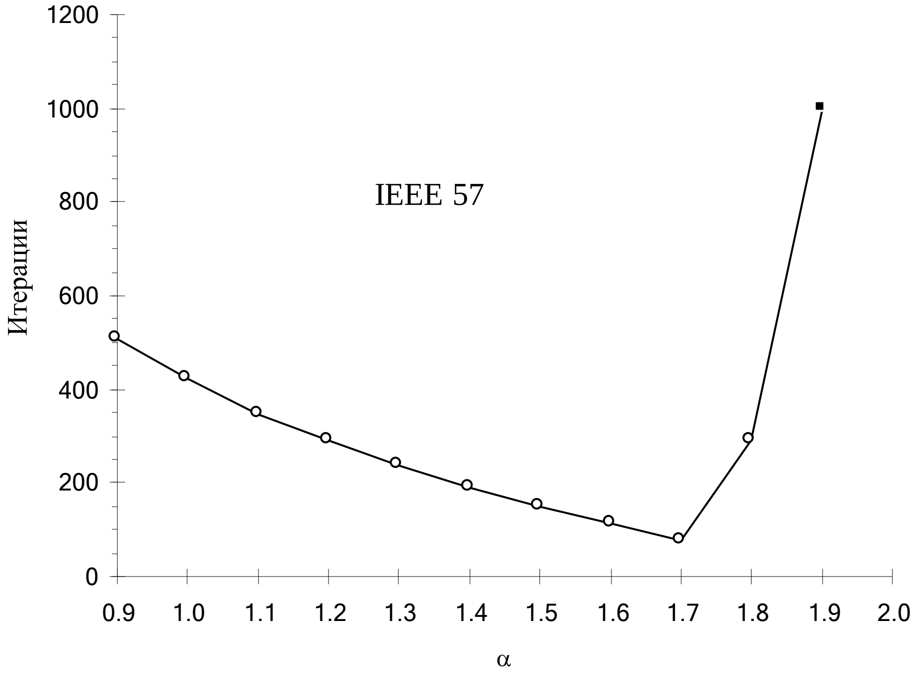
$$\underline{U}_{i_{(\text{подобрен})}}^{(\nu+1)} = \underline{U}_i^{(\nu)} + \underline{\alpha} \cdot \left(\underline{U}_i^{(\nu+1)} - \underline{U}_i^{(\nu)} \right) = \underline{U}_i^{(\nu)} + \underline{\alpha} \cdot \Delta \underline{U}_i^{(\nu+1)} \qquad \underline{\alpha} = 1,1 \div 1,8$$

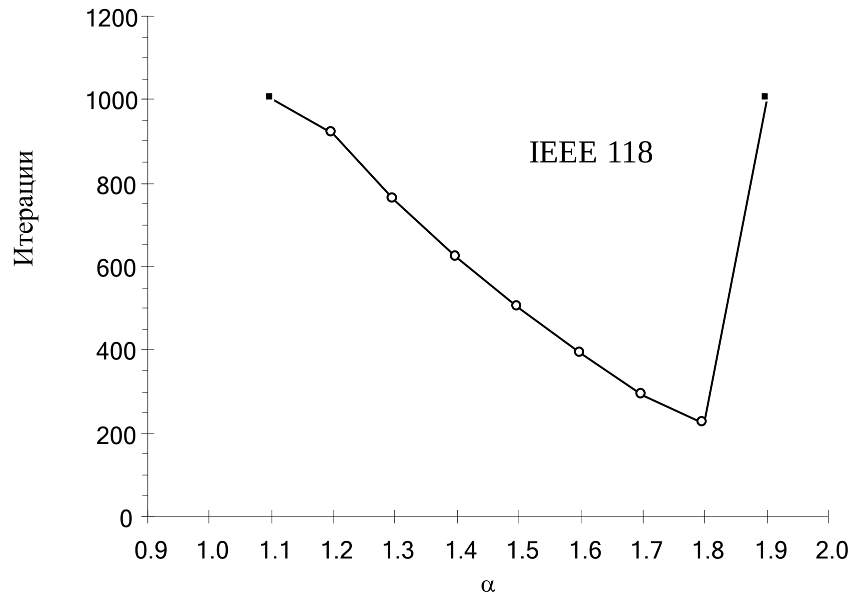


ГАУС-ЗАЈДЕЛОВ МЕТОД

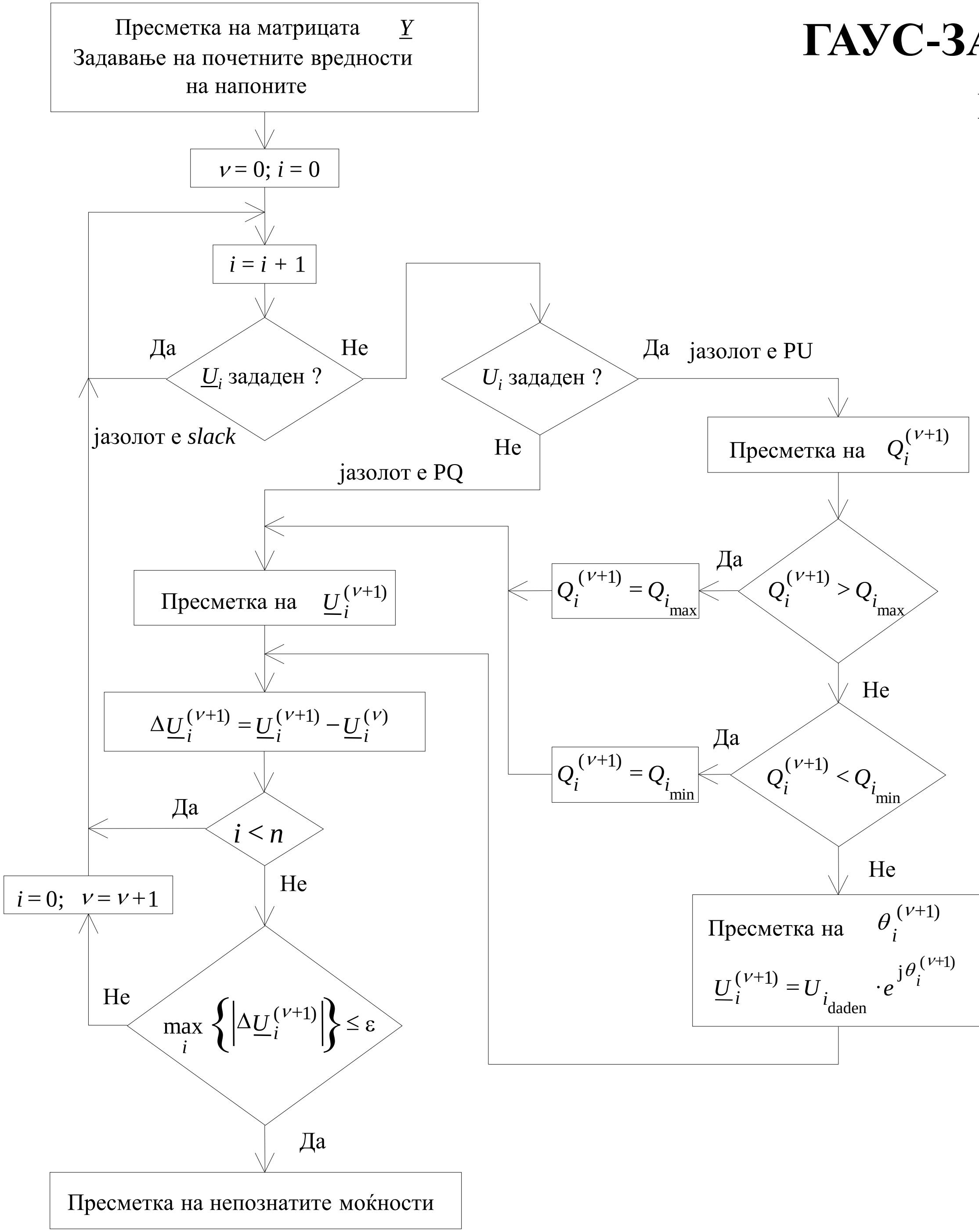








ГАУС-ЗАЈДЕЛОВ МЕТОД



Карактеристики на методот

- едноставен со мали барања за компјутерска меморија голем број итерации
- може да дивергира особено во системи со негативни реактанции
- послаба конвергенција за големи слабо поврзани мрежи
- проблеми со конвергенцијата ако има PU јазли

$$Q_i^{(\nu+1)} - Q_{i(\text{пот.})} > Q_{i_{\max}} \Rightarrow Q_i = Q_{i_{\max}} - Q_{i(\text{пот.})}$$

$$Q_i^{(\nu+1)} - Q_{i(\text{пот.})} < Q_{i_{\min}} \Rightarrow Q_i = Q_{i_{\min}} - Q_{i(\text{пот.})}$$

ГАУС-ЗАЈДЕЛОВ МЕТОД ЗА ЈАЗЛИ СО КОНТРОЛИРАН НАПОН (PU ЈАЗЛИ)

$$\underline{U}_i^{(\nu+1)} = \frac{1}{\underline{Y}_{ii}} \cdot \left(\frac{P_i - \mathrm{j}Q_i}{\left(\underline{U}_i^{(\nu)}\right)^*} - \sum_{l=1}^{i-1} \underline{Y}_{il} \cdot \underline{U}_l^{(\nu+1)} - \sum_{l=i+1}^{n} \underline{Y}_{il} \cdot \underline{U}_l^{(\nu)} \right); \; i = 1,2,\cdots,n; \; i \neq s$$

Ако јазолот е од типот PU, не е позната инјектираната реактивна моќност Q_i и, за да се примени претходната формула, таа моќност треба да се пресмета

$$\underline{S}_i = \underline{U}_i \cdot \underline{I}_i^* = \underline{U}_i \cdot \left(\sum_{l=1}^{n} \underline{Y}_{il} \cdot \underline{U}_l \right)^*$$

$$Q_i = Q_i^{(\nu+1)} = \mathrm{Im}\left\{\underline{S}_i\right\} = \mathrm{Im}\left\{ \underline{U}_i \cdot \sum_{l=1}^{n} \left(\underline{Y}_{il} \cdot \underline{U}_l \right)^* \right\} = \mathrm{Im}\left\{ \underline{U}_i^{(\nu)} \cdot \sum_{l=1}^{i-1} \left(\underline{Y}_{il} \cdot \underline{U}_l^{(\nu+1)} \right)^* + \underline{U}_i^{(\nu)} \cdot \sum_{l=i}^{n} \left(\underline{Y}_{il} \cdot \underline{U}_l^{(\nu)} \right)^* \right\}$$

$$Q_i^{(\nu+1)} = Q_{i_{\text{генератор}}}^{(\nu+1)} - Q_{i_{\text{потрошувач}}} \qquad Q_{i_{\text{генеаратор}}}^{(\nu+1)} = Q_i^{(\nu+1)} + Q_{i_{\text{потрошувач}}}$$

$$Q_{i_{\min}} \leq Q_{i_{\text{генератор}}}^{(\nu+1)} \leq Q_{i_{\max}}$$

Ако пресметаната инјектирана моќност на генераторот ги надминува претходно наведените ограничувања, јазолот треба да се преквалификува во PQ со инјектирана реактивна моќност пресметана според една од следниве формули

$$Q_i = Q_{i_{\min}} - Q_{i_{\text{потрошувач}}} \quad \text{или} \quad Q_i = Q_{i_{\max}} - Q_{i_{\text{потрошувач}}}$$

ГАУС-ЗАЈДЕЛОВ МЕТОД ЗА ЈАЗЛИ СО КОНТРОЛИРАН НАПОН (PU ЈАЗЛИ)

Врз основа на инјектираната реактивна моќност определена претходно се пресметува комплексниот напон во јазолот

$$\underline{U}_i^{(\nu+1)} = \frac{1}{\underline{Y}_{ii}} \cdot \left(\frac{P_i - \mathrm{j}Q_i}{\left(\underline{U}_i^{(\nu)}\right)^*} - \sum_{l=1}^{i-1} \underline{Y}_{il} \cdot \underline{U}_l^{(\nu+1)} - \sum_{l=i+1}^{n} \underline{Y}_{il} \cdot \underline{U}_l^{(\nu)} \right);\ i = 1,2,\cdots,n;\ i \neq s$$

Врз основа на инјектираната реактивна моќност определена претходно се пресметува комплексниот напон во јазолот

Бидејќи за PU јазлите ја знаеме ефективната вредност на напонот, од претходниот израз го определуваме само фазниот агол и тој, заедно со зададената ефективна вредност на напонот, го користиме за да го определиме (новиот) комплексниот напон во јазолот

$$\underline{U}_i^{(\nu+1)} = E_i^{(\nu+1)} + \mathrm{j}F_i^{(\nu+1)} = U_{i_{\text{спец.}}} \cdot \left(\cos\theta_i^{(\nu+1)} + \mathrm{j}\sin\theta_i^{(\nu+1)} \right)$$

$$\theta_i^{(\nu+1)} = \arctan\left(\frac{F_i^{(\nu+1)}}{E_i^{(\nu+1)}} \right)$$

$$\boxed{\underline{U}_i^{(\nu+1)} = U_{i_{\text{спец.}}} \cdot \left(\cos\theta_i^{(\nu+1)} + \mathrm{j}\sin\theta_i^{(\nu+1)} \right)}$$

РАВЕНКИ ЗА ИНЈЕКТИРАНИ МОЌНОСТИ

- *n* (независни) јазли
- *n*-1 јазли со непознат фазен агол на напонот (напонот во јазолот наречен *slack* е познат)
  - *n*-1 познати инјектирани активни моќности во јазлите
- *q* на јазли со непозната ефективна вредност на напонот и со познати инјектирани реактивни моќности во јазлите
  - q јазли од типот PQ
  - *n*-1-*q* јазли со контролиран напон (PU јазли)
- во општ случај, јазлите можат да бидат подредени произволно
  - подредувањето на јазлите не влијае врз конвергенцијата на итеративните процеси, но може (незначително) да влијае врз времето за пресметка ако се користат специјални методи за решавање на системи линеарни равенки со ретки матрици на коефициенти
    - резултатите од пресметките ќе бидат исти (во рамките на бараната толеранција) за било кое подредување на јазлите
- со цел да се поедностави пишувањето на равенките и да се поедностават пресметките, во рамките на овие предавања (за методите различни од Гаус-Зајдеовиот метод), јазлите ќе се подредуваат на следниот начин
  - во листата на подредени јазли најнапред доаѓаат јазлите од типот PQ (произволен редослед)
  - потоа следуваат јазлите од типот PU (произволен редослед)
  - последен јазол е јазолот со познат напон (тип S)

$$\underline{U}_i^{(\nu+1)} = \frac{1}{\underline{Y}_{ii}} \cdot \left(\frac{P_i - \mathrm{j}Q_i}{\left(\underline{U}_i^{(\nu)}\right)^*} - \sum_{l=1}^{i-1} \underline{Y}_{il} \cdot \underline{U}_l^{(\nu+1)} - \sum_{l=i+1}^{n} \underline{Y}_{il} \cdot \underline{U}_l^{(\nu)} \right);\ i = 1,2,\cdots,n;\ i \neq s$$

РАВЕНКИ ЗА ИНЈЕКТИРАНИ МОЌНОСТИ

- n (независни) јазли
- n-1 јазли со непознат фазен агол на напонот (напонот во јазолот наречен *slack* е познат)
  - n-1 познати инјектирани активни моќности во јазлите
- q на јазли со непозната ефективна вредност на напонот и со познати инјектирани реактивни моќности во јазлите
  - q јазли од типот PQ
  - n-1-q јазли со контролиран напон (PU јазли)

$$\underline{I}_i = \sum_{k=1}^{n} \underline{Y}_{ik} \cdot \underline{U}_k \qquad \underline{S}_i = P_i + \mathrm{j}Q_i = \underline{U}_i \cdot \underline{I}_i^* = \underline{U}_i \cdot \sum_{k=1}^{n} \underline{Y}_{ik}^* \cdot \underline{U}_k^*$$

$$\underline{U}_k = U_k \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta_k} = U_k \cdot (\cos\theta_k + \mathrm{j}\sin\theta_k)$$

$$\underline{Y}_{ik} = G_{ik} + \mathrm{j}B_{ik}$$

$$\underline{S}_i = U_i \cdot (\cos\theta_i + \mathrm{j}\sin\theta_i) \cdot \sum_{k=1}^{n} (G_{ik} - \mathrm{j}B_{ik}) \cdot U_k \cdot (\cos\theta_k - \mathrm{j}\sin\theta_k)$$

$$\underline{S}_i = U_i \cdot e^{\mathrm{j}\theta_i} \cdot \sum_{k=1}^{n} \left(G_{ik} - \mathrm{j}B_{ik}\right) \cdot U_k \cdot e^{-\mathrm{j}\theta_k}$$

$$\underline{S}_i = U_i \cdot \sum_{k=1}^{n} \left(G_{ik} - \mathrm{j}B_{ik}\right) \cdot U_k \cdot e^{\mathrm{j}\theta_i} \cdot e^{-\mathrm{j}\theta_k}$$

$$\underline{S}_i = U_i \cdot \sum_{k=1}^{n} \left(G_{ik} - \mathrm{j}B_{ik}\right) \cdot U_k \cdot e^{\mathrm{j}(\theta_i - \theta_k)} = U_i \cdot \sum_{k=1}^{n} \left(G_{ik} - \mathrm{j}B_{ik}\right) \cdot U_k \cdot \left[\cos\left(\theta_i - \theta_k\right) + \mathrm{j}\sin\left(\theta_i - \theta_k\right)\right]$$

РАВЕНКИ ЗА ИНЈЕКТИРАНИ МОЌНОСТИ

- n (независни) јазли
- n-1 јазли со непознат фазен агол на напонот (напонот во јазолот наречен *slack* е познат)
  - n-1 познати инјектирани активни моќности во јазлите
- q на јазли со непозната ефективна вредност на напонот и со познати инјектирани реактивни моќности во јазлите
  - q јазли од типот PQ
  - n-1-q јазли со контролиран напон (PU јазли)

$$\theta_i - \theta_k = \theta_{ik}$$

$$\theta_k - \theta_i = \theta_{ki}$$

$$\theta_{ii} = 0$$

$$\underline{S}_i = U_i \cdot \sum_{k=1}^{n} \left(G_{ik} - \mathrm{j}B_{ik} \right) \cdot U_k \cdot \left[\cos\theta_{ik} + \mathrm{j}\sin\theta_{ik} \right]$$

$$= U_i \cdot \sum_{k=1}^{n} U_k \cdot \left[G_{ik} \cdot \cos\theta_{ik} + B_{ik} \cdot \sin\theta_{ik} + \mathrm{j}\left(G_{ik} \cdot \sin\theta_{ik} - B_{ik} \cdot \cos\theta_{ik} \right) \right]$$

$$P_i = U_i \cdot \sum_{k=1}^{n} U_k \cdot \left(G_{ik} \cdot \cos\theta_{ik} + B_{ik} \cdot \sin\theta_{ik} \right)$$

$$= G_{ii} \cdot U_i^2 + U_i \cdot \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{n} U_k \cdot \left(G_{ik} \cdot \cos\theta_{ik} + B_{ik} \cdot \sin\theta_{ik} \right)$$

$$= G_{ii} \cdot U_i^2 + U_i \cdot \sum_{k \in \alpha_i} U_k \cdot \left(G_{ik} \cdot \cos\theta_{ik} + B_{ik} \cdot \sin\theta_{ik} \right)$$

$$i = 1, \cdots, n-1$$

$$Q_i = U_i \cdot \sum_{k=1}^{n} U_k \cdot \left(G_{ik} \cdot \sin\theta_{ik} - B_{ik} \cdot \cos\theta_{ik} \right)$$

$$= -B_{ii} \cdot U_i^2 + U_i \cdot \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{n} U_k \cdot \left(G_{ik} \cdot \sin\theta_{ik} - B_{ik} \cdot \cos\theta_{ik} \right)$$

$$= -B_{ii} \cdot U_i^2 + U_i \cdot \sum_{k \in \alpha_i} U_k \cdot \left(G_{ik} \cdot \sin\theta_{ik} - B_{ik} \cdot \cos\theta_{ik} \right)$$

$$i = 1, \cdots, q$$

ЊУТН-РАФСОНОВ МЕТОД

- n-1 јазли со непознат фазен агол на напонот (напонот во јазолот наречен *slack* е познат)
  - n-1 познати инјектирани активни моќности во јазлите
- q на јазли со непозната ефективна вредност на напонот и со познати инјектирани реактивни моќности во јазлите
  - q јазли од типот PQ
  - n-1-q јазли со контролиран напон (PU јазли)

$$P_i = P_i\left(\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_{n-1}, U_1, U_2, \cdots, U_q\right) = G_{ii} \cdot U_i^2 + U_i \cdot \sum_{k \in \alpha_i} U_k \cdot (G_{ik} \cdot \cos\theta_{ik} + B_{ik} \cdot \sin\theta_{ik})$$

$$i = 1, \cdots, n-1$$

$$Q_i = Q_i\left(\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_{n-1}, U_1, U_2, \cdots, U_q\right) = -B_{ii} \cdot U_i^2 + U_i \cdot \sum_{k \in \alpha_i} U_k \cdot (G_{ik} \cdot \sin\theta_{ik} - B_{ik} \cdot \cos\theta_{ik})$$

$$i = 1, \cdots, q$$

Систем од n-1+q нелинеарни равенки што може да се реши со итеративна постапка

Почетни (претпоставени) вредности на непознатите („рамен старт“)

$$\theta_1^{(0)} = \theta_2^{(0)} = \cdots = \theta_{n-1}^{(0)} = 0$$

$$U_1^{(0)} = U_2^{(0)} = \cdots = U_q^{(0)} = 1$$

Разлика помеѓу точните и почетните вредности на непознатите

$$\Delta\theta_i^{(0)} = \theta_i - \theta_i^{(0)}; \ i = 1, \cdots, n-1$$

$$\Delta U_i^{(0)} = U_i - U_i^{(0)}; \ i = 1, \cdots, q$$

ЊУТН-РАФСОНОВ МЕТОД

$$P_i = P_i\left(\theta_1,\cdots,\theta_{n-1},U_1,\cdots,U_q\right) = P_i\left(\theta_1^{(0)}+\Delta\theta_1^{(0)},\cdots,\theta_{n-1}^{(0)}+\Delta\theta_{n-1}^{(0)},U_1^{(0)}+\Delta U_1^{(0)},\cdots,U_q^{(0)}+\Delta U_q^{(0)}\right)$$

$$i=1,\cdots,n-1$$

$$Q_i = Q_i\left(\theta_1,\cdots,\theta_{n-1},U_1,\cdots,U_q\right) = Q_i\left(\theta_1^{(0)}+\Delta\theta_1^{(0)},\cdots,\theta_{n-1}^{(0)}+\Delta\theta_{n-1}^{(0)},U_1^{(0)}+\Delta U_1^{(0)},\cdots,U_q^{(0)}+\Delta U_q^{(0)}\right)$$

$$i=1,\cdots,q$$

Функциите P_i и Q_i се развиваат во Тејлоров ред во околина на почетното решение

$$P_i = P_i\left(\theta_1^{(0)},\theta_2^{(0)},\cdots,\theta_{n-1}^{(0)},U_1^{(0)},U_2^{(0)},\cdots,U_q^{(0)}\right)$$

$$+\left.\frac{\partial P_i}{\partial\theta_1}\right|^{(0)}\cdot\Delta\theta_1^{(0)}+\left.\frac{\partial P_i}{\partial\theta_2}\right|^{(0)}\cdot\Delta\theta_2^{(0)}+\cdots+\left.\frac{\partial P_i}{\partial\theta_{n-1}}\right|^{(0)}\cdot\Delta\theta_{n-1}^{(0)}$$

$$+\left.\frac{\partial P_i}{\partial U_1}\right|^{(0)}\cdot\Delta U_1^{(0)}+\left.\frac{\partial P_i}{\partial U_2}\right|^{(0)}\cdot\Delta U_2^{(0)}+\cdots+\left.\frac{\partial P_i}{\partial U_q}\right|^{(0)}\cdot\Delta U_q^{(0)}$$

+остаток

ЊУТН-РАФСОНОВ МЕТОД

$$P_i = P_i\left(\theta_1^{\ (0)}, \theta_2^{\ (0)}, \cdots, \theta_{n-1}^{(0)}, U_1^{(0)}, U_2^{(0)}, \cdots, U_q^{(0)}\right)$$

$$+\left.\frac{\partial P_i}{\partial \theta_1}\right|^{(0)} \cdot \Delta\theta_1^{\ (0)} + \left.\frac{\partial P_i}{\partial \theta_2}\right|^{(0)} \cdot \Delta\theta_2^{\ (0)} + \cdots + \left.\frac{\partial P_i}{\partial \theta_{n-1}}\right|^{(0)} \cdot \Delta\theta_{n-1}^{(0)}$$

$$+\left.\frac{\partial P_i}{\partial U_1}\right|^{(0)} \cdot \Delta U_1^{(0)} + \left.\frac{\partial P_i}{\partial U_2}\right|^{(0)} \cdot \Delta U_2^{(0)} + \cdots + \left.\frac{\partial P_i}{\partial U_q}\right|^{(0)} \cdot \Delta U_q^{(0)}$$

$$+\text{остаток}$$

$$\text{остаток} \to 0$$

$$P_{i_{\text{пресметана}}}^{(0)} = P_i\left(\theta_1^{\ (0)}, \theta_2^{\ (0)}, \cdots, \theta_{n-1}^{(0)}, U_1^{(0)}, U_2^{(0)}, \cdots, U_q^{(0)}\right) \qquad P_i = P_{i_{\text{дадена}}} = P_{i_{\text{пресметана}}}^{(0)} + \Delta P_i^{(0)}$$

Разлика помеѓу зададената и пресметаната инјектирана активна моќност

$$\Delta P_i^{(0)} = P_{i_{\text{дадена}}} - P_{i_{\text{пресметана}}}^{(0)}$$

$$\Delta P_i^{(0)} = \left.\frac{\partial P_i}{\partial \theta_1}\right|^{(0)} \cdot \Delta\theta_1^{(0)} + \left.\frac{\partial P_i}{\partial \theta_2}\right|^{(0)} \cdot \Delta\theta_2^{(0)} + \cdots + \left.\frac{\partial P_i}{\partial \theta_{n-1}}\right|^{(0)} \cdot \Delta\theta_{n-1}^{(0)}$$

$$+\left.\frac{\partial P_i}{\partial U_1}\right|^{(0)} \cdot \Delta U_1^{(0)} + \left.\frac{\partial P_i}{\partial U_2}\right|^{(0)} \cdot \Delta U_2^{(0)} + \cdots + \left.\frac{\partial P_i}{\partial U_q}\right|^{(0)} \cdot \Delta U_q^{(0)}$$

ЊУТН-РАФСОНОВ МЕТОД

– Можеме да пресметаме n−1 разлики ΔP_i
  - сите јазли со позната инјектирана активна моќност (PQ и PU)

$$\Delta P_i^{(0)} = P_{i_{\text{дадена}}} - P_{i_{\text{пресметана}}}^{(0)}$$

$$\Delta P_i^{(0)} = \left.\frac{\partial P_i}{\partial \theta_1}\right|^{(0)} \cdot \Delta\theta_1^{(0)} + \left.\frac{\partial P_i}{\partial \theta_2}\right|^{(0)} \cdot \Delta\theta_2^{(0)} + \cdots + \left.\frac{\partial P_i}{\partial \theta_{n-1}}\right|^{(0)} \cdot \Delta\theta_{n-1}^{(0)}$$

$$+ \left.\frac{\partial P_i}{\partial U_1}\right|^{(0)} \cdot \Delta U_1^{(0)} + \left.\frac{\partial P_i}{\partial U_2}\right|^{(0)} \cdot \Delta U_2^{(0)} + \cdots + \left.\frac{\partial P_i}{\partial U_q}\right|^{(0)} \cdot \Delta U_q^{(0)}$$

$$\begin{bmatrix} \left.\frac{\partial P_i}{\partial \theta_1}\right|^{(0)} & \left.\frac{\partial P_i}{\partial \theta_2}\right|^{(0)} & \cdots & \left.\frac{\partial P_i}{\partial \theta_{n-1}}\right|^{(0)} & \left.\frac{\partial P_i}{\partial U_1}\right|^{(0)} & \left.\frac{\partial P_i}{\partial U_2}\right|^{(0)} & \cdots & \left.\frac{\partial P_i}{\partial U_q}\right|^{(0)} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \Delta\theta_1^{(0)} \\ \Delta\theta_2^{(0)} \\ \cdots \\ \Delta\theta_{n-1}^{(0)} \\ \Delta U_1^{(0)} \\ \Delta U_2^{(0)} \\ \cdots \\ \Delta U_q^{(0)} \end{bmatrix} = \Delta P_i^{(0)}$$

$i = 1, \cdots, n-1$ $\quad$ n−1 равенки со n−1+q непознати $\Delta\theta^{(0)}$ и $\Delta U^{(0)}$!

ЊУТН-РАФСОНОВ МЕТОД

Функциите Q_i се развиваат во Тејлоров ред во околина на почетното решение

$$Q_i = Q_i\left(\theta_1^{\ (0)},\theta_2^{\ (0)},\cdots,\theta_{n-1}^{(0)},U_1^{(0)},U_2^{(0)},\cdots,U_q^{(0)}\right)$$

$$+\left.\frac{\partial Q_i}{\partial \theta_1}\right|^{(0)}\cdot\Delta\theta_1^{\ (0)}+\left.\frac{\partial Q_i}{\partial \theta_2}\right|^{(0)}\cdot\Delta\theta_2^{\ (0)}+\cdots+\left.\frac{\partial Q_i}{\partial \theta_{n-1}}\right|^{(0)}\cdot\Delta\theta_{n-1}^{(0)}$$

$$+\left.\frac{\partial Q_i}{\partial U_1}\right|^{(0)}\cdot\Delta U_1^{(0)}+\left.\frac{\partial Q_i}{\partial U_2}\right|^{(0)}\cdot\Delta U_2^{(0)}+\cdots+\left.\frac{\partial q_i}{\partial U_q}\right|^{(0)}\cdot\Delta U_q^{(0)}$$

$+$ остаток

остаток $\rightarrow 0$

$$Q_{i_{\text{пресметана}}}^{(0)} = Q_i\left(\theta_1^{\ (0)},\theta_2^{\ (0)},\cdots,\theta_{n-1}^{(0)},U_1^{(0)},U_2^{(0)},\cdots,U_q^{(0)}\right) \quad Q_i = Q_{i_{\text{дадена}}} = Q_{i_{\text{пресметана}}}^{(0)} + \Delta Q_i^{(0)}$$

Разлика помеѓу зададената и пресметаната инјектирана реактивна моќност

$$\Delta Q_i^{(0)} = Q_{i_{\text{дадена}}} - Q_{i_{\text{пресметана}}}^{(0)}$$

$$\Delta Q_i^{(0)} = \left.\frac{\partial Q_i}{\partial \theta_1}\right|^{(0)}\cdot\Delta\theta_1^{(0)}+\left.\frac{\partial Q_i}{\partial \theta_2}\right|^{(0)}\cdot\Delta\theta_2^{(0)}+\cdots+\left.\frac{\partial Q_i}{\partial \theta_{n-1}}\right|^{(0)}\cdot\Delta\theta_{n-1}^{(0)}$$

$$+\left.\frac{\partial Q_i}{\partial U_1}\right|^{(0)}\cdot\Delta U_1^{(0)}+\left.\frac{\partial Q_i}{\partial U_2}\right|^{(0)}\cdot\Delta U_2^{(0)}+\cdots+\left.\frac{\partial q_i}{\partial U_q}\right|^{(0)}\cdot\Delta U_q^{(0)}$$

ЊУТН-РАФСОНОВ МЕТОД

– Можеме да пресметаме q разлики ΔQ_i
  - сите јазли со позната инјектирана реактивна моќност (PQ)

$$\Delta Q_i^{(0)} = Q_{i_{\text{дадена}}} - Q_{i_{\text{пресметана}}}^{(0)}$$

$$\Delta Q_i^{(0)} = \left.\frac{\partial Q_i}{\partial \theta_1}\right|^{(0)} \cdot \Delta\theta_1^{(0)} + \left.\frac{\partial Q_i}{\partial \theta_2}\right|^{(0)} \cdot \Delta\theta_2^{(0)} + \cdots + \left.\frac{\partial Q_i}{\partial \theta_{n-1}}\right|^{(0)} \cdot \Delta\theta_{n-1}^{(0)}$$

$$+ \left.\frac{\partial Q_i}{\partial U_1}\right|^{(0)} \cdot \Delta U_1^{(0)} + \left.\frac{\partial Q_i}{\partial U_2}\right|^{(0)} \cdot \Delta U_2^{(0)} + \cdots + \left.\frac{\partial q_i}{\partial U_q}\right|^{(0)} \cdot \Delta U_q^{(0)}$$

$$\left[\left.\frac{\partial Q_i}{\partial \theta_1}\right|^{(0)} \quad \left.\frac{\partial Q_i}{\partial \theta_2}\right|^{(0)} \quad \cdots \quad \left.\frac{\partial Q_i}{\partial \theta_{n-1}}\right|^{(0)} \quad \left.\frac{\partial Q_i}{\partial U_1}\right|^{(0)} \quad \left.\frac{\partial Q_i}{\partial U_2}\right|^{(0)} \quad \cdots \quad \left.\frac{\partial Q_i}{\partial U_q}\right|^{(0)}\right] \times \begin{bmatrix} \Delta\theta_1^{(0)} \\ \Delta\theta_2^{(0)} \\ \cdots \\ \Delta\theta_{n-1}^{(0)} \\ \Delta U_1^{(0)} \\ \Delta U_2^{(0)} \\ \cdots \\ \Delta U_q^{(0)} \end{bmatrix} = \Delta Q_i^{(0)}$$

q равенки со $n-1+q$ непознати $\Delta\theta^{(0)}$ и $\Delta U^{(0)}$!

$$i = 1, \cdots, q$$

ЊУТН-РАФСОНОВ МЕТОД

$$\left[\begin{array}{cccccccc}
\left.\frac{\partial P_1}{\partial \theta_1}\right|^{(0)} & \left.\frac{\partial P_1}{\partial \theta_2}\right|^{(0)} & \cdots & \left.\frac{\partial P_1}{\partial \theta_{n-1}}\right|^{(0)} & \left.\frac{\partial P_1}{\partial U_1}\right|^{(0)} & \left.\frac{\partial P_1}{\partial U_2}\right|^{(0)} & \cdots & \left.\frac{\partial P_1}{\partial U_q}\right|^{(0)} \\
\left.\frac{\partial P_2}{\partial \theta_1}\right|^{(0)} & \left.\frac{\partial P_2}{\partial \theta_2}\right|^{(0)} & \cdots & \left.\frac{\partial P_2}{\partial \theta_{n-1}}\right|^{(0)} & \left.\frac{\partial P_2}{\partial U_1}\right|^{(0)} & \left.\frac{\partial P_2}{\partial U_2}\right|^{(0)} & \cdots & \left.\frac{\partial P_2}{\partial U_q}\right|^{(0)} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
\left.\frac{\partial P_{n-1}}{\partial \theta_1}\right|^{(0)} & \left.\frac{\partial P_{n-1}}{\partial \theta_2}\right|^{(0)} & \cdots & \left.\frac{\partial P_{n-1}}{\partial \theta_{n-1}}\right|^{(0)} & \left.\frac{\partial P_{n-1}}{\partial U_1}\right|^{(0)} & \left.\frac{\partial P_{n-1}}{\partial U_2}\right|^{(0)} & \cdots & \left.\frac{\partial P_{n-1}}{\partial U_q}\right|^{(0)} \\
\hdashline
\left.\frac{\partial Q_1}{\partial \theta_1}\right|^{(0)} & \left.\frac{\partial Q_1}{\partial \theta_2}\right|^{(0)} & \cdots & \left.\frac{\partial Q_1}{\partial \theta_{n-1}}\right|^{(0)} & \left.\frac{\partial Q_1}{\partial U_1}\right|^{(0)} & \left.\frac{\partial Q_1}{\partial U_2}\right|^{(0)} & \cdots & \left.\frac{\partial Q_1}{\partial U_q}\right|^{(0)} \\
\left.\frac{\partial Q_2}{\partial \theta_1}\right|^{(0)} & \left.\frac{\partial Q_2}{\partial \theta_2}\right|^{(0)} & \cdots & \left.\frac{\partial Q_2}{\partial \theta_{n-1}}\right|^{(0)} & \left.\frac{\partial Q_2}{\partial U_1}\right|^{(0)} & \left.\frac{\partial Q_2}{\partial U_2}\right|^{(0)} & \cdots & \left.\frac{\partial Q_2}{\partial U_q}\right|^{(0)} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
\left.\frac{\partial Q_q}{\partial \theta_1}\right|^{(0)} & \left.\frac{\partial Q_q}{\partial \theta_2}\right|^{(0)} & \cdots & \left.\frac{\partial Q_q}{\partial \theta_{n-1}}\right|^{(0)} & \left.\frac{\partial Q_q}{\partial U_1}\right|^{(0)} & \left.\frac{\partial Q_q}{\partial U_2}\right|^{(0)} & \cdots & \left.\frac{\partial Q_q}{\partial U_q}\right|^{(0)}
\end{array}\right] \times \begin{bmatrix} \Delta\theta_1^{(0)} \\ \Delta\theta_2^{(0)} \\ \cdots \\ \Delta\theta_{n-1}^{(0)} \\ \Delta U_1^{(0)} \\ \Delta U_2^{(0)} \\ \cdots \\ \Delta U_q^{(0)} \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c} \Delta P_1^{(0)} \\ \Delta P_2^{(0)} \\ \cdots \\ \Delta P_{n-1}^{(0)} \\ \hdashline \Delta Q_1^{(0)} \\ \Delta Q_2^{(0)} \\ \cdots \\ \Delta Q_q^{(0)} \end{array}\right]$$

$n-1+q$ равенки со $n-1+q$ непознати $\Delta\theta^{(0)}$ и $\Delta U^{(0)}$!

ЊУТН-РАФСОНОВ МЕТОД

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial P_1}{\partial \theta_1} & \cdots & \frac{\partial P_1}{\partial \theta_{n-1}} & \frac{\partial P_1}{\partial U_1} & \cdots & \frac{\partial P_1}{\partial U_q} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial P_{n-1}}{\partial \theta_1} & \cdots & \frac{\partial P_{n-1}}{\partial \theta_{n-1}} & \frac{\partial P_{n-1}}{\partial U_1} & \cdots & \frac{\partial P_{n-1}}{\partial U_q} \\ \hdashline \frac{\partial Q_1}{\partial \theta_1} & \cdots & \frac{\partial Q_1}{\partial \theta_{n-1}} & \frac{\partial Q_1}{\partial U_1} & \cdots & \frac{\partial Q_1}{\partial U_q} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial Q_q}{\partial \theta_1} & \cdots & \frac{\partial Q_q}{\partial \theta_{n-1}} & \frac{\partial Q_q}{\partial U_1} & \cdots & \frac{\partial Q_q}{\partial U_q} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \Delta\theta_1 \\ \cdots \\ \Delta\theta_{n-1} \\ \Delta U_1 \\ \cdots \\ \Delta U_q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta P_1 \\ \cdots \\ \Delta P_{n-1} \\ \hdashline \Delta Q_1 \\ \cdots \\ \Delta Q_q \end{bmatrix}$$

$n-1+q$ равенки со $n-1+q$ непознати $\Delta\theta$ и ΔU !

ЊУТН-РАФСОНОВ МЕТОД

$$\Delta P_i^{(0)} = \frac{\partial P_i}{\partial \theta_1}\bigg|^{(0)} \cdot \Delta\theta_1^{(0)} + \frac{\partial P_i}{\partial \theta_2}\bigg|^{(0)} \cdot \Delta\theta_2^{(0)} + \cdots + \frac{\partial P_i}{\partial \theta_{n-1}}\bigg|^{(0)} \cdot \Delta\theta_{n-1}^{(0)}$$

$$+ \frac{\partial P_i}{\partial U_1} U_1\bigg|^{(0)} \cdot \frac{\Delta U_1^{(0)}}{U_1} + \frac{\partial P_i}{\partial U_2} U_2\bigg|^{(0)} \cdot \frac{\Delta U_2^{(0)}}{U_2} + \cdots + \frac{\partial P_i}{\partial U_q} U_q\bigg|^{(0)} \cdot \frac{\Delta U_q^{(0)}}{U_q}$$

$$\Delta Q_i^{(0)} = \frac{\partial Q_i}{\partial \theta_1}\bigg|^{(0)} \cdot \Delta\theta_1^{(0)} + \frac{\partial Q_i}{\partial \theta_2}\bigg|^{(0)} \cdot \Delta\theta_2^{(0)} + \cdots + \frac{\partial Q_i}{\partial \theta_{n-1}}\bigg|^{(0)} \cdot \Delta\theta_{n-1}^{(0)}$$

$$+ \frac{\partial Q_i}{\partial U_1} U_1\bigg|^{(0)} \cdot \frac{\Delta U_1^{(0)}}{U_1} + \frac{\partial Q_i}{\partial U_2} U_2\bigg|^{(0)} \cdot \frac{\Delta U_2^{(0)}}{U_2} + \cdots + \frac{\partial q_i}{\partial U_q} U_q\bigg|^{(0)} \cdot \frac{\Delta U_q^{(0)}}{U_q}$$

ЊУТН-РАФСОНОВ МЕТОД

Систем $n-1+q$ линеарни равенки со $n-1+q$ непознати $\Delta\theta^{(0)}$ и $\Delta U^{(0)}$!
Матрицата на коефициенти на системот равенки (јакобијан) е квадратна и, во општ случај, не е симетрична

$$\left[\begin{array}{ccc:ccc}
\frac{\partial P_1}{\partial \theta_1} & \cdots & \frac{\partial P_1}{\partial \theta_{n-1}} & \frac{\partial P_1}{\partial U_1}\cdot U_1 & \cdots & \frac{\partial P_1}{\partial U_q}\cdot U_q \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
\frac{\partial P_{n-1}}{\partial \theta_1} & \cdots & \frac{\partial P_{n-1}}{\partial \theta_{n-1}} & \frac{\partial P_{n-1}}{\partial U_1}\cdot U_1 & \cdots & \frac{\partial P_{n-1}}{\partial U_q}\cdot U_q \\
\hdashline
\frac{\partial Q_1}{\partial \theta_1} & \cdots & \frac{\partial Q_1}{\partial \theta_{n-1}} & \frac{\partial Q_1}{\partial U_1}\cdot U_1 & \cdots & \frac{\partial Q_1}{\partial U_q}\cdot U_q \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
\frac{\partial Q_q}{\partial \theta_1} & \cdots & \frac{\partial Q_q}{\partial \theta_{n-1}} & \frac{\partial Q_q}{\partial U_1}\cdot U_1 & \cdots & \frac{\partial Q_q}{\partial U_q}\cdot U_q
\end{array}\right] \times \left[\begin{array}{c}
\Delta\theta_1 \\ \cdots \\ \Delta\theta_{n-1} \\ \frac{\Delta U_1}{U_1} \\ \cdots \\ \frac{\Delta U_q}{U_q}
\end{array}\right] = \left[\begin{array}{c}
\Delta P_1 \\ \cdots \\ \Delta P_{n-1} \\ \hdashline \Delta Q_1 \\ \cdots \\ \Delta Q_q
\end{array}\right]$$

ЊУТН-РАФСОНОВ МЕТОД

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{H} & \boldsymbol{N} \\ \boldsymbol{M} & \boldsymbol{L} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta\boldsymbol{\theta} \\ \Delta\boldsymbol{U}/\boldsymbol{U} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta\boldsymbol{P} \\ \Delta\boldsymbol{Q} \end{bmatrix} \quad \Delta\boldsymbol{P} = \begin{bmatrix} \Delta P_1 \\ \Delta P_2 \\ \vdots \\ \Delta P_{n-1} \end{bmatrix}, \quad \Delta\boldsymbol{Q} = \begin{bmatrix} \Delta Q_1 \\ \Delta Q_2 \\ \vdots \\ \Delta Q_q \end{bmatrix}, \quad \Delta\boldsymbol{\theta} = \begin{bmatrix} \Delta \theta_1 \\ \Delta \theta_2 \\ \vdots \\ \Delta \theta_{n-1} \end{bmatrix}, \quad \Delta\boldsymbol{U}/\boldsymbol{U} = \begin{bmatrix} \Delta U_1 / U_1 \\ \Delta U_2 / U_2 \\ \vdots \\ \Delta U_q / U_q \end{bmatrix}$$

$$H_{ik} = \frac{\partial P_i}{\partial \theta_k}, \; i = 1, \cdots, n-1; \; k = 1, \cdots, n-1$$

$\boldsymbol{H}_{(n-1)\times(n-1)}$

$\boldsymbol{N}_{(n-1)\times q}$

$\boldsymbol{M}_{q\times(n-1)}$

$\boldsymbol{L}_{q\times q}$

$$N_{ik} = \frac{\partial P_i}{\partial U_k} \cdot U_k, \; i = 1, \cdots, n-1; \; k = 1, \cdots, q$$

$$M_{ik} = \frac{\partial Q_i}{\partial \theta_k}, \; i = 1, \cdots, q; \; k = 1, \cdots, n-1$$

$$L_{ik} = \frac{\partial Q_i}{\partial U_k} \cdot U_k, \; i = 1, \cdots, q; \; k = 1, \cdots, q$$

$\Delta\boldsymbol{\theta}_{(n-1)\times 1}$

$\left(\Delta\boldsymbol{U}/\boldsymbol{U}\right)_{q\times 1}$

$\Delta\boldsymbol{P}_{(n-1)\times 1}$

$\Delta\boldsymbol{Q}_{q\times 1}$

ЊУТН-РАФСОНОВ МЕТОД

1. Задавање на почетните вредности за напоните ($\nu = 0$)
2. Пресметка на инјектираните моќности во јазлите во итерацијата ν
   - инјектирана активна моќност во PQ и PU јазли (сите јазли освен *slack)*
   - инјектирана реактивна моќност во PQ јазлите

$$P_i^{(\nu)} = G_{ii} \cdot U_i^{(\nu)^2} + U_i^{(\nu)} \cdot \sum_{k=1}^{n} U_k^{(\nu)} \cdot \left(G_{ik} \cdot \cos\theta_{ik}^{(\nu)} + B_{ik} \cdot \sin\theta_{ik}^{(\nu)} \right), \ i = 1, \cdots, n-1$$

$$Q_i^{(\nu)} = -B_{ii} \cdot U_i^{(\nu)^2} + U_i^{(\nu)} \cdot \sum_{k=1}^{n} U_k^{(\nu)} \cdot \left(G_{ik} \cdot \sin\theta_{ik}^{(\nu)} - B_{ik} \cdot \cos\theta_{ik}^{(\nu)} \right), \ i = 1, \cdots, q$$

пресметките за Q се прават за $n-1$ јазли

3. Пресметка на разликите на моќности

$$\Delta P_i^{(\nu)} = P_{i_{\text{дадена}}} - P_{i_{\text{пресметана}}}^{(\nu)} \qquad \Delta Q_i^{(\nu)} = Q_{i_{\text{дадена}}} - Q_{i_{\text{пресметана}}}^{(\nu)}$$

4. Определување на најголемата разлика на моќности и проверка на критериумот за завршување на итеративниот процес
   - ако е исполнет следниот услов пресметките завршуваат со чекорот 9.

$$\max_i \left\{ \left| \Delta P_i^{(\nu)} \right|, \left| \Delta Q_i^{(\nu)} \right| \right\} \le \varepsilon$$

5. Пресметка на елементите на јакобијанот

$$H_{ik} = \frac{\partial P_i}{\partial \theta_k}, \ i = 1, \cdots, n-1; \ k = 1, \cdots, n-1 \qquad N_{ik} = \frac{\partial P_i}{\partial U_k} \cdot U_k, \ i = 1, \cdots, n-1; \ k = 1, \cdots, q$$

$$M_{ik} = \frac{\partial Q_i}{\partial \theta_k}, \ i = 1, \cdots, q; \ k = 1, \cdots, n-1 \qquad L_{ik} = \frac{\partial Q_i}{\partial U_k} \cdot U_k, \ i = 1, \cdots, q; \ k = 1, \cdots, q$$

ЊУТН-РАФСОНОВ МЕТОД

6. Решавање на системот линеарни равенки и определување на непознатите $\Delta\theta$ и ΔU
   - инверзијата е само еден од методите!

$$\left[\begin{array}{c}\Delta\boldsymbol{\theta}\\ \hline \Delta\boldsymbol{U}/\boldsymbol{U}\end{array}\right]=\left[\begin{array}{c|c}\boldsymbol{H}&\boldsymbol{N}\\ \hline \boldsymbol{M}&\boldsymbol{L}\end{array}\right]^{-1}\times\left[\begin{array}{c}\Delta\boldsymbol{P}\\ \hline \Delta\boldsymbol{Q}\end{array}\right]$$

7. Определување на фазните агли и напоните на јазлите во итерацијата $\nu+1$

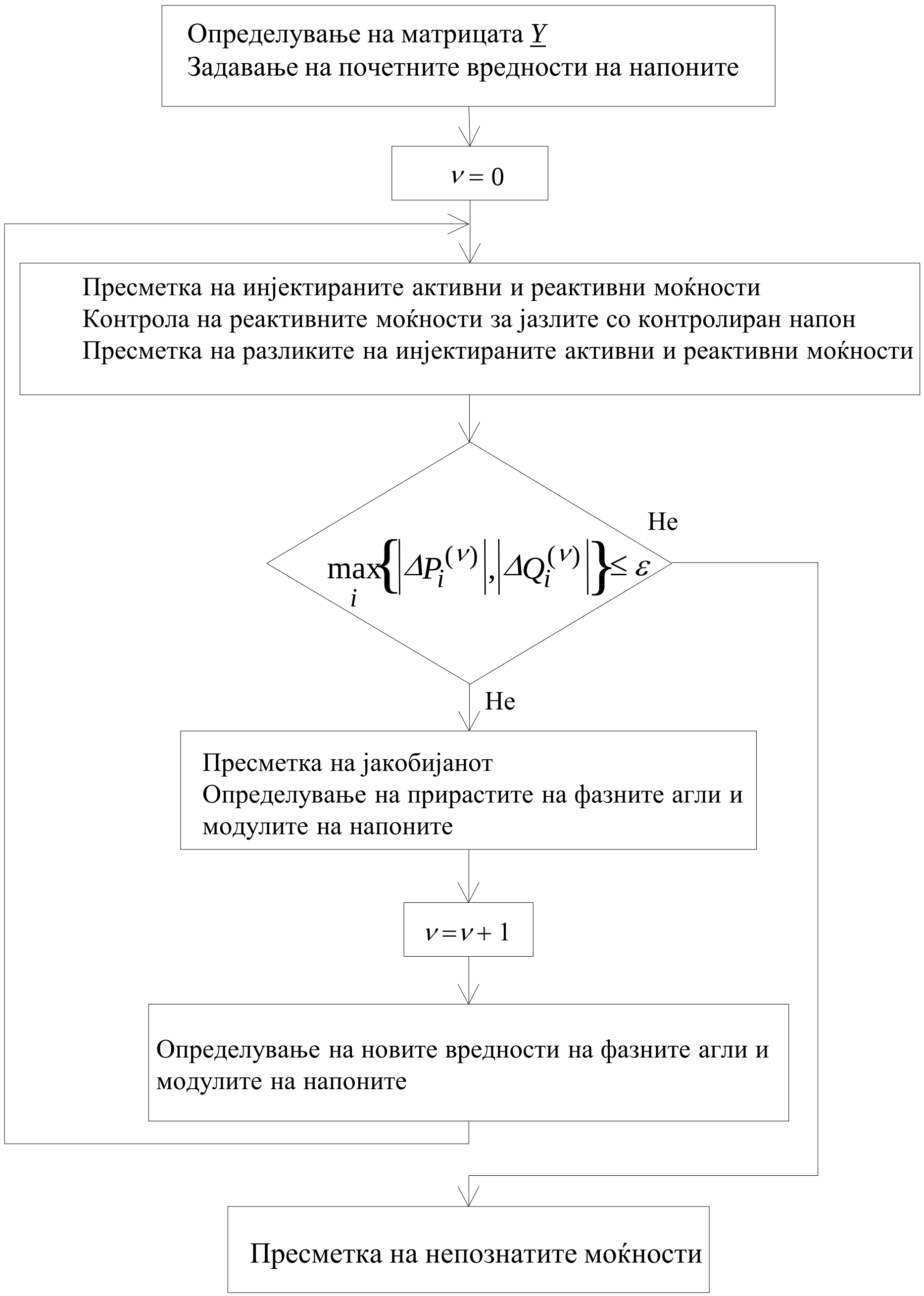
$$\theta_i^{(\nu+1)}=\theta_i^{(\nu)}+\Delta\theta_i^{(\nu)};\ i=1,\cdots,n-1$$

$$U_i^{(\nu+1)}=U_i^{(\nu)}+\Delta U_i^{(\nu)}=U_i^{(\nu)}+U_i^{(\nu)}\cdot\left(\frac{\Delta U_i}{U_i}\right)^{(\nu)};\ i=1,\cdots,q$$

8. Се повторува постапката со чекорот 2.

9. Крај на пресметките и пресметка на инјектиранаата моќност во *slack* и непознатите реактивни моќности во PU јазлите

ЊУТН-РАФСОНОВ МЕТОД



Карактеристики на методот

- квадратна конвергенција ако почетните вредности на непознатите не се разликуваат многу од точните вредности
- мал број на итерации (не зависи од големината на системот, присуство на PU јазли и/или постоењето на негативни реактанции)
- големи потреби за компјутерска меморија (за особено големи ЕЕС)
- во секоја итерација:
    - се пресметува матрицата на системот линеарни равенки (јакобијан)
    - се решава систем линеарни равенки n-1+q
    - времето потребно за извршување на пресметките во една итерација е значително поголемо отколку кај Гаус-Зајделовиот метод, но вкупното време е во корист на Њутн-Рафсоновиот метод

ЊУТН-РАФСОНОВ МЕТОД

МЕШАНА ФОРМА НА ЕЛЕМЕНТИТЕ НА ЈАКОБИЈАНОТ

$$H_{ij} = \frac{\partial P_i}{\partial \theta_j} = \frac{\partial}{\partial \theta_j}\left[G_{ii} \cdot U_i^2 + U_i \cdot \sum_{k \in \alpha_i} U_k \cdot \left(G_{ik} \cdot \cos\theta_{ik} + B_{ik} \cdot \sin\theta_{ik} \right) \right],$$

$$i = 1, \cdots, n-1; \quad j = 1, \cdots, n-1; \quad j \neq i;$$

$$H_{ij} = U_i \cdot U_j \cdot \left(G_{ij} \cdot \sin\theta_{ij} - B_{ij} \cdot \cos\theta_{ij} \right),$$

$$i = 1, \cdots, n-1; \quad j = 1, \cdots, n-1; \quad j \neq i;$$

$$H_{ii} = \frac{\partial P_i}{\partial \theta_i} = -U_i \cdot \sum_{k \in \alpha_i} U_k \cdot \left(G_{ik} \cdot \sin\theta_{ik} - B_{ik} \cdot \cos\theta_{ik} \right)$$

$$H_{ii} = -B_{ii} \cdot U_i^2 - Q_{i_{\text{пресметана}}}$$

ЊУТН-РАФСОНОВ МЕТОД

МЕШАНА ФОРМА НА ЕЛЕМЕНТИТЕ НА ЈАКОБИЈАНОТ

$$N_{ij} = \frac{\partial P_i}{\partial U_j} U_j = \frac{\partial}{\partial U_j} \left[G_{ii} \cdot U_i^2 + U_i \cdot \sum_{k \in \alpha_i} U_k \cdot \left(G_{ik} \cdot \cos\theta_{ik} + B_{ik} \cdot \sin\theta_{ik} \right) \right] \cdot U_j \ ,$$

$$i = 1, \cdots, n-1; \quad j = 1, \cdots, q; \quad j \neq i;$$

$$N_{ij} = U_i \cdot U_j \cdot \left(G_{ij} \cdot \cos\theta_{ij} + B_{ij} \cdot \sin\theta_{ij} \right),$$

$$i = 1, \cdots, n-1; \quad j = 1, \cdots, q; \quad j \neq i;$$

$$N_{ii} = \frac{\partial P_i}{\partial U_i} U_i = 2 G_{ii} \cdot U_i^2 + U_i \cdot \sum_{k \in \alpha_i} U_k \cdot \left(G_{ik} \cdot \cos\theta_{ik} + B_{ik} \cdot \sin\theta_{ik} \right)$$

$$= G_{ii} \cdot U_i^2 + P_{i_{\text{пресметана}}}$$

$$N_{ii} = G_{ii} \cdot U_i^2 + P_{i_{\text{пресметана}}}$$

ЊУТН-РАФСОНОВ МЕТОД

МЕШАНА ФОРМА НА ЕЛЕМЕНТИТЕ НА ЈАКОБИЈАНОТ

$$M_{ij} = \frac{\partial Q_i}{\partial \theta_j} = \frac{\partial}{\partial \theta_j}\left[-B_{ii} \cdot U_i^2 + U_i \cdot \sum_{k \in \alpha_i} U_k \cdot \left(G_{ik} \cdot \sin\theta_{ik} - B_{ik} \cdot \cos\theta_{ik}\right)\right],$$

$$i = 1, \cdots, q; \quad j = 1, \cdots, n-1; \quad j \neq i;$$

$$M_{ij} = -U_i \cdot U_j \cdot \left(G_{ij} \cdot \cos\theta_{ij} + B_{ij} \cdot \sin\theta_{ij}\right),$$

$$i = 1, \cdots, q; \quad j = 1, \cdots, n-1; \quad j \neq i;$$

$$M_{ij} = -N_{ij} \quad ; \quad j \neq i$$

$$M_{ii} = \frac{\partial Q_i}{\partial \theta_i} = U_i \cdot \sum_{k \in \alpha_i} U_k \cdot \left(G_{ik} \cdot \cos\theta_{ik} + B_{ik} \cdot \sin\theta_{ik}\right)$$

$$M_{ii} = -G_{ii} \cdot U_i^2 + P_{i_{\text{пресметана}}}$$

ЊУТН-РАФСОНОВ МЕТОД

МЕШАНА ФОРМА НА ЕЛЕМЕНТИТЕ НА ЈАКОБИЈАНОТ

$$L_{ij} = \frac{\partial Q_i}{\partial U_j} U_j = \frac{\partial Q_i}{\partial U_j} \left[-B_{ii} \cdot U_i^2 + U_i \cdot \sum_{k \in \alpha_i} U_k \cdot \left(G_{ik} \cdot \sin\theta_{ik} - B_{ik} \cdot \cos\theta_{ik} \right) \right] \cdot U_j \ ,$$

$$i = 1, \cdots, q; \quad j = 1, \cdots, q; \quad j \neq i;$$

$$L_{ij} = U_i \cdot U_j \cdot \left(G_{ij} \cdot \sin\theta_{ij} - B_{ij} \cdot \cos\theta_{ij} \right),$$

$$i = 1, \cdots, q; \quad j = 1, \cdots, q; \quad j \neq i;$$

$$L_{ij} = H_{ij} \ ; i, j = 1, \cdots q; \ j \neq i,$$

$$L_{ii} = \frac{\partial Q_i}{\partial U_i} U_i = \frac{\partial}{\partial U_i} \left[-B_{ii} \cdot U_i^2 + U_i \cdot \sum_{k \in \alpha_i} U_k \cdot \left(G_{ik} \cdot \sin\theta_{ik} - B_{ik} \cdot \cos\theta_{ik} \right) \right] \cdot U_i$$

$$L_{ii} = \frac{\partial Q_i}{\partial U_i} U_i = -2B_{ii} \cdot U_i^2 + U_i \cdot \sum_{k \in \alpha_i} U_k \cdot \left(G_{ik} \cdot \sin\theta_{ik} - B_{ik} \cdot \cos\theta_{ik} \right)$$

$$L_{ii} = -B_{ii} \cdot U_i^2 + Q_{i_{\text{пресметана}}}$$

ЊУТН-РАФСОНОВ МЕТОД

Тест систем	Гаус-Зајделов метод	Њутн-Рафсонов метод	Брз метод со раздвојување	
			Верзија XB	Верзија BX
IEEE 14	32 (1,6)	3	4	4,5
IEEE 30	55 (1,8)	3	3,5	4,5
IEEE 57	75 (1,7)	3	4,5	4,5
IEEE 118	221 (1,8)	3	4,5	4,5

Релативно време за пресметка

Тест-систем	Брз метод со раздвојување Верзија XB			Њутн-Рафсонов метод			Гаус-Зајделов метод
	LDLt	LU	INV_BT	LU	SLR_Gauss	INV_BT	
IEEE 14	1,00	1,00	1,20	3,00	3,10	4,05	4,35
IEEE 30	2,60	2,80	4,40	18,60	21,45	36,35	23,45
IEEE 57	10,65	11,70	24,80	127,15	235,05	245,25	108,70
IEEE 118	43,10	49,65	126,00	479,75	1017,25	1204,40	1428,95

Pentium 133 – 1,00 = 2 ms

ЊУТН-РАФСОНОВ МЕТОД

- **Карактеристики на јакобијанот**
  - несиметрична матрица и обемот на пресметките за нејзино формирање е голем
    - субматриците $\boldsymbol{H}$ и $\boldsymbol{L}$ се симетрични само во првата итерација
    - ако $\underline{\boldsymbol{Y}}$=j$\boldsymbol{B}$ во првата итерација елементите на субматриците $\boldsymbol{N}$ и $\boldsymbol{M}$ се еднакви на нула
  - потребно е да се пресметува во секоја итерација

$$\left[\begin{array}{c:c} \boldsymbol{H} & \boldsymbol{N} \\ \hdashline \boldsymbol{M} & \boldsymbol{L} \end{array}\right] \cdot \left[\begin{array}{c} \Delta\boldsymbol{\theta} \\ \hdashline \Delta\boldsymbol{U}/\boldsymbol{U} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} \Delta\boldsymbol{P} \\ \hdashline \Delta\boldsymbol{Q} \end{array}\right] \quad \rightarrow \quad \begin{array}{l} \boldsymbol{H}\cdot\Delta\boldsymbol{\theta} = \Delta\boldsymbol{P} \\ \boldsymbol{L}\cdot\Delta\boldsymbol{U}/\boldsymbol{U} = \Delta\boldsymbol{Q} \end{array}$$

- помали се ефектите ако се користат методите за решавање на системи линеарни равенки со факторизација или инверзија

LU ФАКТОРИЗАЦИЈА

- Квадратна несингуларна матрица $\boldsymbol{A}$ може да се претстави како производ на две квадратни матрици од ист ред означени како $\boldsymbol{L}$ и $\boldsymbol{U}$.

$$\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{X} = \boldsymbol{B}$$

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{L} \times \boldsymbol{U}$$

$$\boldsymbol{L} = \begin{bmatrix} l_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ l_{31} & l_{23} & l_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{n1} & l_{n2} & l_{n3} & \cdots & l_{nn} \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{U} = \begin{bmatrix} 1 & u_{12} & u_{1k} & \cdots & u_{1n} \\ 0 & 1 & u_{2k} & \cdots & u_{2n} \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & u_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} l_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ l_{31} & l_{23} & l_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{n1} & l_{n2} & l_{n3} & \cdots & l_{nn} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & u_{12} & u_{1k} & \cdots & u_{1n} \\ 0 & 1 & u_{2k} & \cdots & u_{2n} \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & u_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

LU ФАКТОРИЗАЦИЈА

$$\boldsymbol{L} \times \boldsymbol{U} \times \boldsymbol{X} = \boldsymbol{B}$$

$$\begin{bmatrix} l_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ l_{31} & l_{23} & l_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{n1} & l_{n2} & l_{n3} & \cdots & l_{nn} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & u_{12} & u_{1k} & \cdots & u_{1n} \\ 0 & 1 & u_{2k} & \cdots & u_{2n} \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & u_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{U} \times \boldsymbol{X} = \boldsymbol{C}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & u_{12} & u_{1k} & \cdots & u_{1n} \\ 0 & 1 & u_{2k} & \cdots & u_{2n} \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & u_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}$$

LU ФАКТОРИЗАЦИЈА

$$\boldsymbol{U} \times \boldsymbol{X} = \boldsymbol{C}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & u_{12} & u_{1k} & \cdots & u_{1n} \\ 0 & 1 & u_{2k} & \cdots & u_{2n} \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & u_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{L} \times \boldsymbol{C} = \boldsymbol{B}$$

$$\begin{bmatrix} l_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ l_{31} & l_{23} & l_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{n1} & l_{n2} & l_{n3} & \cdots & l_{nn} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

LU ФАКТОРИЗАЦИЈА

- 1. се решава системот равенки и се определува векторот $\boldsymbol{C}$

$$\boldsymbol{L} \times \boldsymbol{C} = \boldsymbol{B}$$

$$\begin{bmatrix} l_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ l_{31} & l_{23} & l_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{n1} & l_{n2} & l_{n3} & \cdots & l_{nn} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

- 2. се решава системот равенки и се определува векторот X

$$\boldsymbol{U} \times \boldsymbol{X} = \boldsymbol{C}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & u_{12} & u_{1k} & \cdots & u_{1n} \\ 0 & 1 & u_{2k} & \cdots & u_{2n} \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & u_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}$$

ЊУТН-РАФСОНОВ МЕТОД

- **Модификации на Њутн-Рафсоновиот метод**
  - пресметка на јакобијанот во секоја втора итерација
  - занемарување на вондијагоналните субматрици ($\boldsymbol{N}$ и $\boldsymbol{M}$) со што се добиваат два система линеарни равенки – раздвојување на пресметките за фазните агли и модулите на напоните (*decoupling*)

$$\left[\begin{array}{c:c} \boldsymbol{H} & \boldsymbol{N} \\ \hdashline \boldsymbol{M} & \boldsymbol{L} \end{array}\right] \cdot \left[\begin{array}{c} \Delta\boldsymbol{\theta} \\ \hdashline \Delta\boldsymbol{U}/\boldsymbol{U} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} \Delta\boldsymbol{P} \\ \hdashline \Delta\boldsymbol{Q} \end{array}\right] \quad \rightarrow \quad \begin{array}{l} \boldsymbol{H} \cdot \Delta\boldsymbol{\theta} = \Delta\boldsymbol{P} \\ \boldsymbol{L} \cdot \Delta\boldsymbol{U}/\boldsymbol{U} = \Delta\boldsymbol{Q} \end{array}$$

ЊУТН-РАФСОНОВ МЕТОД

- Модификации на Њутн-Рафсоновиот метод
  - занемарување на субматриците N и M

$$\left[\begin{array}{c:c} \boldsymbol{H} & \boldsymbol{N} \\ \hdashline \boldsymbol{M} & \boldsymbol{L} \end{array}\right] \cdot \left[\begin{array}{c} \Delta\boldsymbol{\theta} \\ \hdashline \Delta\boldsymbol{U}/\boldsymbol{U} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} \Delta\boldsymbol{P} \\ \hdashline \Delta\boldsymbol{Q} \end{array}\right]$$

$$\boldsymbol{H} \cdot \Delta\boldsymbol{\theta} = \Delta\boldsymbol{P}$$

$$\boldsymbol{L} \cdot \Delta\boldsymbol{U}/\boldsymbol{U} = \Delta\boldsymbol{Q}$$

$$\begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} & \cdots & H_{1,n-1} \\ H_{12} & H_{22} & \cdots & H_{2,n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ H_{n-1,1} & H_{n-1,2} & \cdots & H_{n-1,n-1} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \Delta\theta_1 \\ \Delta\theta_2 \\ \vdots \\ \Delta\theta_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta P_1 \\ \Delta P_2 \\ \vdots \\ \Delta P_{n-1} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} L_{11} & L_{12} & \cdots & L_{1q} \\ L_{21} & L_{22} & \cdots & L_{2q} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ L_{q1} & L_{q2} & \cdots & L_{qq} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \Delta U_1/U_1 \\ \Delta U_2/U_2 \\ \vdots \\ \Delta U_q/U_q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta Q_1 \\ \Delta Q_2 \\ \vdots \\ \Delta Q_q \end{bmatrix}$$

Субматриците *H* и *L* не се константни и се пресметуваат во секоја итерација

ЊУТН-РАФСОНОВ МЕТОД

Пример 4.4 Систем без PU јазли N ≠ 0 и M ≠ 0

15.11.2006   14:45 Primer 4.4 Zadaca od predavanja za sistem bez PU (NR)

Vlezni podatoci za grankite

	R	X	G'xE-06	B'xE-06	Prenosen odnos
A - B	0.000000	0.8000000E-01	0.000000	10000.00	1.00/ 1.00
B - C	0.000000	0.3200000	0.000000	40000.00	1.00/ 1.00
A - C	0.000000	0.1600000	0.000000	20000.00	1.00/ 1.00

Vlezni podatoci za jazlite

Jazol	P	Q	U	Theta	Tip	Ubaz
C	-1.500000	-1.000000	?	?	PQ	1.00
B	0.6000000	0.4000000	?	?	PQ	1.00
A	?	?	1.050000	0.000000	S	1.00

ЊУТН-РАФСОНОВ МЕТОД

Пример 4.4 Систем без PU јазли N ≠ 0 и M ≠ 0

```
 Naponi vo jazlite posle   3.0 iteracii; (dP,dQ)max= 0.5662441E-05 < 0.1000000E-02
-----------------------------------------------------------------------------------
   (      E       +j       F        )  (    U         [ejth (rad.)]    )  (        U[ejth]       )
-----------------------------------------------------------------------------------
 C ( 0.9097298     j-0.1505489    )  ( 0.9221026     ej-0.1640011    )  (     0.92 ej -9.39657)
 B (  1.047819     j 0.6703206E-02)  (  1.047840     ej 0.6397208E-02)  (     1.05 ej  0.36653)
 A (  1.050000     j  0.000000    )  (  1.050000     ej  0.000000    )  (     1.05 ej  0.00000)
-----------------------------------------------------------------------------------

                    Zadadeni i presmetani moknosti vo jazlite (p.u.)
-----------------------------------------------------------------------------------
        (      P       +j      Q        )(      P       +j      Q        )(     dP        +j       dQ       )
-----------------------------------------------------------------------------------
C(PQ)   ( -1.500000     j -1.000000     )( -1.499996     j-0.9999943     )(-0.4172325E-05 j-0.5662441E-05)
B(PQ)   ( 0.6000000     j 0.4000000     )( 0.5999985     j 0.4000009     )( 0.1549721E-05 j-0.9238720E-06)
A(S )   (  0.000000     j  0.000000     )( 0.8999974     j 0.9326135     )(  0.000000     j  0.000000    )
-----------------------------------------------------------------------------------
Zagubi: ( 0.5960464E-07 j 0.3326201    )
```

ЊУТН-РАФСОНОВ МЕТОД

Пример 4.4 Систем без PU јазли N = 0 и M = 0

```
 Naponi vo jazlite posle   5.0 iteracii; (dP,dQ)max= 0.3022552E-03 < 0.1000000E-02
-------------------------------------------------------------------------------------------------
   (      E       +j       F        )  (    U         [ejth (rad.)]    )  (        U[ejth]       )
-------------------------------------------------------------------------------------------------
 C ( 0.9097844     j-0.1505331    )  ( 0.9221539     ej-0.1639745    )  (     0.92 ej -9.39505)
 B (  1.047836     j 0.6701950E-02)  (  1.047857     ej 0.6395904E-02)  (     1.05 ej  0.36646)
 A (  1.050000     j  0.000000    )  (  1.050000     ej  0.000000    )  (     1.05 ej  0.00000)
-------------------------------------------------------------------------------------------------

                      Zadadeni i presmetani moknosti vo jazlite (p.u.)
-------------------------------------------------------------------------------------------------
        (      P       +j      Q        )(       P       +j      Q        )(     dP        +j      dQ      )
-------------------------------------------------------------------------------------------------
C(PQ)   ( -1.500000     j -1.000000     )( -1.499846     j-0.9996977     )(-0.1541376E-03 j-0.3022552E-03)
B(PQ)   ( 0.6000000     j 0.4000000     )( 0.5999358     j 0.4001088     )( 0.6419420E-04 j-0.1087487E-03)
A(S )   (  0.000000     j  0.000000     )( 0.8999100     j 0.9320307     )(  0.000000     j  0.000000    )
-------------------------------------------------------------------------------------------------
Zagubi: (-0.5960464E-07 j 0.3324417    )
```

МОДИФИКАЦИИ НА ЊУТН-РАФСОНОВИОТ МЕТОД

- Модификации
  - занемарување на вондијагоналните субматрици (***N*** и ***M***) со што се добиваат два система линеарни равенки – раздвојување на пресметките за фазните агли и модулите на напоните *(decoupling)*

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{H} & \vdots & \boldsymbol{N} \\ \cdots & & \cdots \\ \boldsymbol{M} & \vdots & \boldsymbol{L} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta\boldsymbol{\theta} \\ \cdots \\ \Delta\boldsymbol{U}/\boldsymbol{U} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta\boldsymbol{P} \\ \cdots \\ \Delta\boldsymbol{Q} \end{bmatrix} \rightarrow \begin{matrix} \boldsymbol{H}\cdot\Delta\boldsymbol{\theta} = \Delta\boldsymbol{P} \\ \boldsymbol{L}\cdot\Delta\boldsymbol{U}/\boldsymbol{U} = \Delta\boldsymbol{Q} \end{matrix}$$

  - најдобри перформанси покажале следните две модификации во кои, покрај раздвојувањето на пресметките за непознатите, матриците на системите линеарни равенки се константни:
    - 1974 – брз метод со раздвојување верзија ***XB*** (*Fast Decoupled Load Flow*)
    - 1989 – брз метод со раздвојување верзија ***BX*** (*General Purpose Fast Decoupled Load Flow*)
  - Заеднички карактеристики на двете верзии на брзиот метод со раздвојување:
    - обемот на пресметки за два независни система равенки со иста димензија е многу помал отколку обемот на пресметки за двојно поголем систем равенки
    - факторизацијата за решавање на системите равенки е многу поефикасна
    - конвергенцијата е полоша, но вкупното време за пресметка е значително покусо (за големи системи десетина пати, па и повеќе)
  - Разлики:
    - начин на формирање на матриците на коефициентите на системите равенки
    - верзијата ***BX*** има подобри перформанси ако во системот има елементи кај кои активната надолжна отпорност е поголема од соодветната реактивна отпорност

БРЗ МЕТОД СО РАЗДВОЈУВАЊЕ

$$\left[\begin{array}{c|c} \boldsymbol{H} & \boldsymbol{N} \\ \hline \boldsymbol{M} & \boldsymbol{L} \end{array}\right] \cdot \left[\begin{array}{c} \Delta\boldsymbol{\theta} \\ \hline \Delta\boldsymbol{U}/\boldsymbol{U} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} \Delta\boldsymbol{P} \\ \hline \Delta\boldsymbol{Q} \end{array}\right]$$

$$\boldsymbol{H} \cdot \Delta\boldsymbol{\theta} = \Delta\boldsymbol{P}$$
$$\boldsymbol{L} \cdot \Delta\boldsymbol{U}/\boldsymbol{U} = \Delta\boldsymbol{Q}$$

$$\boldsymbol{B}' \cdot \Delta\boldsymbol{\theta} = \Delta\boldsymbol{P}/\boldsymbol{U}$$
$$\boldsymbol{B}'' \cdot \Delta\boldsymbol{U} = \Delta\boldsymbol{Q}/\boldsymbol{U}$$

$$\begin{bmatrix} B'_{11} & B'_{12} & \cdots & B'_{1,n-1} \\ B'_{12} & B'_{22} & \cdots & B'_{2,n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ B'_{n-1,1} & B'_{n-1,2} & \cdots & B'_{n-1,n-1} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \Delta\theta_1 \\ \Delta\theta_2 \\ \vdots \\ \Delta\theta_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta P_1/U_1 \\ \Delta P_2/U_2 \\ \vdots \\ \Delta P_{n-1}/U_{n-1} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} B''_{11} & B''_{12} & \cdots & B''_{1q} \\ B''_{21} & B''_{22} & \cdots & B''_{2q} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ B''_{q1} & B''_{q2} & \cdots & B''_{qq} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \Delta U_1 \\ \Delta U_2 \\ \vdots \\ \Delta U_q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta Q_1/U_1 \\ \Delta Q_2/U_2 \\ \vdots \\ \Delta Q_q/U_q \end{bmatrix}$$

Матриците B' и B'' се константни и се пресметуваат на почеток од пресметките

БРЗ МЕТОД СО РАЗДВОЈУВАЊЕ

- Итеративната постапка се изведува во две полу-итерации
  - полу-итерација за пресметка на фазните агли

1.1 Пресметка: ΔP_i (i=1, ⋯,n–1)

1.2 Проверка: ? max$|\Delta P_i| < \varepsilon$ (i=1, ⋯,n–1)

- ДА → Пресметка на ΔQ_i (i=1, ⋯,q) и проверка: ? max$|\Delta Q_i| < \varepsilon$ (i=1, ⋯,q) (Не → 1.3 ; Да → 3)
- НЕ → 1.3

1.3 Пресметка: $\Delta P/U$ → решавање на системот равенки за Δq → q_i (i=1, ⋯,n–1)

$$\theta_i^{(\nu+1)} = \theta_i^{(\nu)} + \Delta\theta_i^{(\nu)};\ i = 1,\cdots,n-1$$

- полу-итерација за пресметка на ефективните вредности на напоните

2.1 Пресметка: ΔQ_i (i=1, ⋯,q)

2.2 Проверка: ? max$|\Delta Q_i| < \varepsilon$ (i=1, ⋯,q)

- ДА → Пресметка и проверка: ? max$|\Delta P_i| < \varepsilon$ (i=1, ⋯,n-1) (НЕ → 2.3 ; ДА → 3)
- NE → 2.3

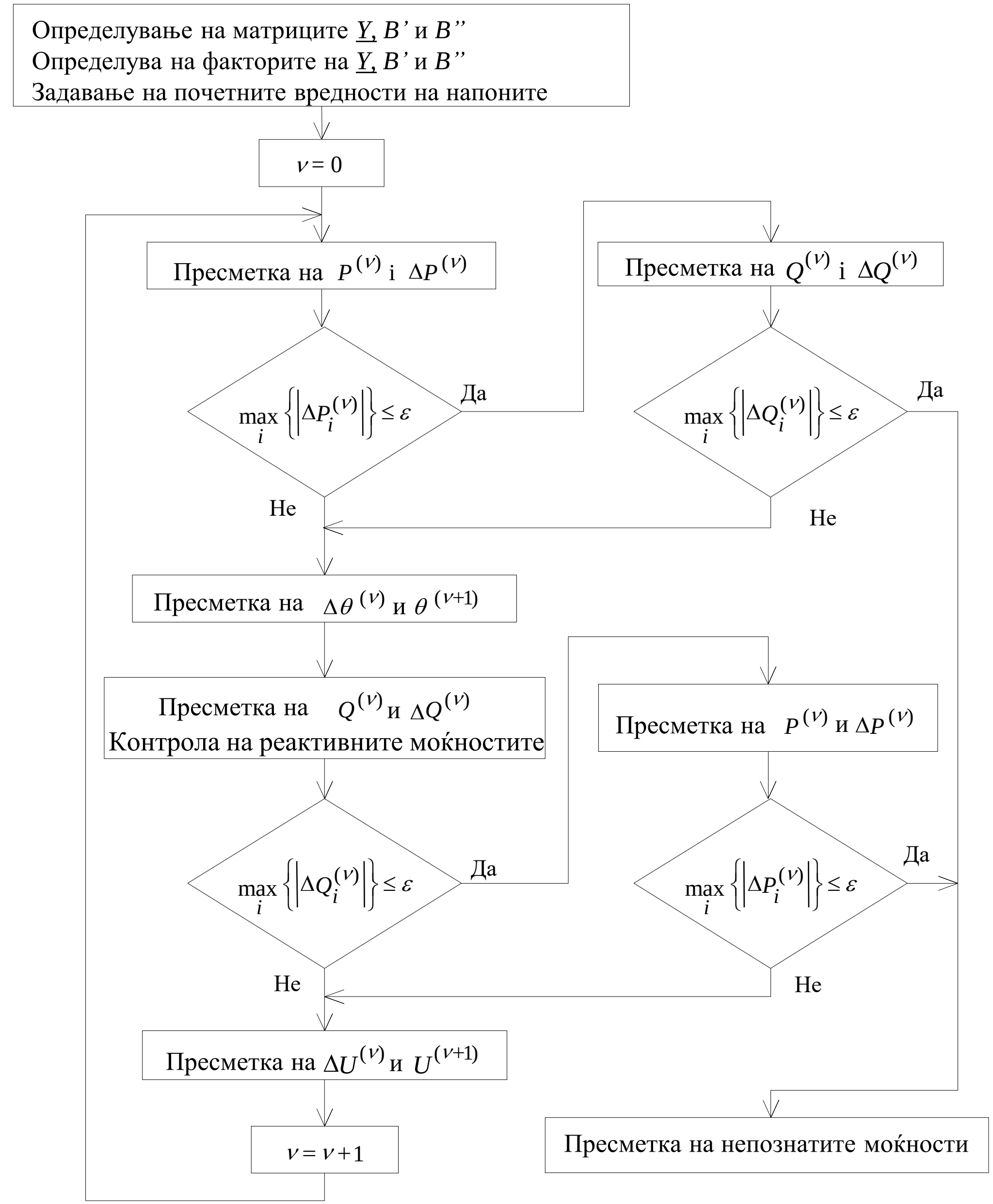
2.3 Пресметка: $\Delta Q/U$ → решавање на системот равенки за ΔU → U_i (i=1, ⋯,q)

2.4 → 1.1

3. Крај

$$U_i^{(\nu+1)} = U_i^{(\nu)} + \Delta U_i^{(\nu)};\ i = 1,\cdots,q$$

БРЗ МЕТОД СО РАЗДВОЈУВАЊЕ



ВЕРЗИЈА XB

$$B'_{ij} = B'_{ji} = \frac{-X_{i-j}}{\left(R'_{i-j}\right)^2 + X^2_{i-j}};\ i, j = 1, \cdots, n-1;\ i \neq j$$

$$B'_{ii} = \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} \frac{X_{i-j}}{\left(R'_{i-j}\right)^2 + X^2_{i-j}};\quad i = 1, \cdots, n-1$$

Матрицата B' претставува имагинарен дел од матрицата $\underline{Y}$ (со спротивен знак) ако во мрежата се занемарат активните отпорности на редните гранки и напречните гранки од π-еквивалентните шеми на елементите

$$R'_{i-j} = 0$$

$$B'_{ij} = B'_{ji} = -\sum_{j\in\beta_i} \frac{1}{X_{i-j}};\ i = 1, \cdots, n-1;\ \ i \neq j$$

$$B'_{ii} = \sum_{j\in\alpha_i} \frac{1}{X_{i-j}};\quad i = 1, \cdots, n-1$$

$$B''_{ij} = B''_{ji} = \frac{-X_{i-j}}{\left(R''_{i-j}\right)^2 + X^2_{i-j}}\quad;\quad i, j = 1, \cdots, q;\ \ i \neq j$$

$$B''_{ii} = \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} \frac{X_{i-j}}{\left(R''_{i-j}\right)^2 + X^2_{i-j}} - B_{i-0};\quad i = 1, \cdots, q$$

Матрицата B'' претставува имагинарен дел од матрицата $\underline{Y}$ (со спротивен знак)

$$R''_{i-j} = R_{i-j}$$

$$B''_{ij} = -B_{ij}\quad;\quad i, j = 1, \cdots, q$$

ВЕРЗИЈА BX

$$B'_{ij} = B'_{ji} = \frac{-X_{i-j}}{\left(R'_{i-j}\right)^2 + X_{i-j}^2};\; i, j = 1, \cdots, n-1;\; i \neq j$$

$$B'_{ii} = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \frac{X_{i-j}}{\left(R'_{i-j}\right)^2 + X_{i-j}^2};\quad i = 1, \cdots, n-1$$

Матрицата B' претставува имагинарен дел од матрицата $\underline{Y}$ (со спротивен знак) ако во мрежата се напречните гранки од π-еквивалентните шеми на елементите

$$R'_{i-j} = R_{i-j}$$

$$B'_{ij} = -B_{ij} \quad ; \quad i, j = 1, \cdots, n-1; \quad i \neq j$$

$$B'_{ii} = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} B_{ij};\; i = 1, \cdots, n-1$$

$$B''_{ij} = B''_{ji} = \frac{-X_{i-j}}{\left(R''_{i-j}\right)^2 + X_{i-j}^2} \quad ; \quad i, j = 1, \cdots, q; \quad i \neq j$$

$$B''_{ii} = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \frac{X_{i-j}}{\left(R''_{i-j}\right)^2 + X_{i-j}^2} - B_{i-0};\quad i = 1, \cdots, q$$

Матрицата B'' претставува имагинарен дел од матрицата $\underline{Y}$ (со спротивен знак) ако во мрежата се занемарат активните отпорности на редните гранки, но се уважуваат напречните гранки од π-еквивалентните шеми на елементите

$$R''_{i-j} = 0$$

$$B''_{ij} = -\sum_{j \in \beta_i} \frac{1}{X_{i-j}} \quad ; \quad i, j = 1, \cdots, q; \quad i \neq j$$

$$B''_{ii} = \sum_{j \in \alpha_i} \frac{1}{X_{i-j}} - B_{i-0};\; i = 1, \cdots, q$$

БРЗ МЕТОД СО РАЗДВОЈУВАЊЕ

$\boldsymbol{B'}$	$\boldsymbol{B''}$
$B'_{ij} = B'_{ji} = \dfrac{-X_{i-j}}{\left(R'_{i-j}\right)^2 + X^2_{i-j}};\ i,j = 1,\cdots,n-1;\ i \neq j$ $B'_{ii} = \sum\limits_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} \dfrac{X_{i-j}}{\left(R'_{i-j}\right)^2 + X^2_{i-j}};\quad i = 1,\cdots,n-1$	$B''_{ij} = B''_{ji} = \dfrac{-X_{i-j}}{\left(R''_{i-j}\right)^2 + X^2_{i-j}};\quad i,j = 1,\cdots,q;\quad i \neq j$ $B''_{ii} = \sum\limits_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} \dfrac{X_{i-j}}{\left(R''_{i-j}\right)^2 + X^2_{i-j}} - B_{i-0};\quad i = 1,\cdots,q$

Верзија XB	Верзија BX
$R'_{i-j} = 0$ $B'_{ij} = B'_{ji} = -\sum\limits_{j\in\beta_i} \dfrac{1}{X_{i-j}};\ i = 1,\cdots,n-1;\quad i \neq j$ $B'_{ii} = \sum\limits_{j\in\alpha_i} \dfrac{1}{X_{i-j}};\quad i = 1,\cdots,n-1$	$R'_{i-j} = R_{i-j}$ $B'_{ij} = -B_{ij}\quad;\quad i,j = 1,\cdots,n-1;\quad i \neq j$ $B'_{ii} = \sum\limits_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} B_{ij};\quad i = 1,\cdots,n-1$
$R''_{i-j} = R_{i-j}$ $B''_{ij} = -B_{ij}\quad;\quad i,j = 1,\cdots,q$	$R''_{i-j} = 0$ $B''_{ij} = -\sum\limits_{j\in\beta_i} \dfrac{1}{X_{i-j}}\quad;\quad i,j = 1,\cdots,q;\quad i \neq j$ $B''_{ii} = \sum\limits_{j\in\alpha_i} \dfrac{1}{X_{i-j}} - B_{i-0};\quad i = 1,\cdots,q$

БРЗ МЕТОД СО РАЗДВОЈУВАЊЕ

- Постојат четири верзии на методот: ***XB*, *BX*, *XX*** и ***BB***
  - последните две верзии се покажале како инфериорни и, практично, не се користат
- Варијантите на брзиот метод со раздвојување се означени со буквите ***X*** и ***B***
  - првата буква означува како се формира матрицата $\boldsymbol{B}'$, додека втората буква означува како се формира матрицата $\boldsymbol{B}''$
  - буквата ***X*** означува дека соодветната матрица ($\boldsymbol{B}'$ во верзијата ***XB***, односно $\boldsymbol{B}''$ во верзијата ***BX***) се определува од имагинарен дел од матрицата $\underline{\boldsymbol{Y}}$ во која **се занемарени** активните отпорности на надолжните гранки (таканаречена „***X*** мрежа“)
  - буквата ***B*** означува дека соодветната матрица ($\boldsymbol{B}''$ во верзијата ***BX***, односно $\boldsymbol{B}'$ во верзијата ***XB***) се определува од имагинарен дел од матрицата $\underline{\boldsymbol{Y}}$ во која **не се занемарени** активните отпорности на редните гранки
  - независно од кој модел на мрежата се определуваат матриците важат следниве правила
    - при определување на матрицата $\boldsymbol{B}'$ **се занемаруваат** напречните гранки од π-еквивалентните шеми на водовите и трансформаторите
    - при определување на матрицата $\boldsymbol{B}''$ **не се занемаруваат** напречните гранки од π-еквивалентните шеми на водовите и трансформаторите
  - кај трансформаторите што имаат неноминален преносен m однос тој може да се уважи или да се земе дека е еднаков на 1 p.u.
    - незначителни разлики во добиените резултати
    - ако се земе дека m<>1 p.u. при формирањето на матрицата $\boldsymbol{B}'$ ќе се занемарат напречните гранки, а реактанцијата на надолжната гранка ќе биде $m \cdot X_T$
    - ако се земе дека m=1 p.u. при формирањето на матрицата $\boldsymbol{B}'$ ќе се занемарат напречните гранки, а реактанцијата надолжната гранка ќе биде X_T
    - при формирање на матрицата $\boldsymbol{B}''$ се користи претпоставениот преносен однос и правилото за занемарување на активната отпорност

БРЗ МЕТОД СО РАЗДВОЈУВАЊЕ – ВЕРЗИЈА *XB*

- Матриците $\boldsymbol{B'}$ и $\boldsymbol{B''}$ во верзијата ***XB*** можат да се определат на следниот начин
  - Матрица $\boldsymbol{B'}$
    - сите елементи во мрежата во мрежата се претставуваат со π-еквивалентни шеми во кои **се занемарени напречните гранки** и активните отпорности на редните гранки се еднакви на нула ($\boldsymbol{R_{i\text{-}j}=0}$)
    - за така дефинираната мрежа се формира матрица на адмитанции на вообичаениот начин
    - од добиената матрица се елиминира (редуцира) редицата и колоната за јазолот со познат напон (редот на матрицата е за 1 помал од редот на матрицата $\underline{\boldsymbol{Y}}$
    - матрицата $\boldsymbol{B'}$ е со спротивен знак од имагинарниот дел на редуцираната матрица (со индекс R=0; Y'=0)
  - Матрица $\boldsymbol{B''}$
    - од матрицата $\underline{\boldsymbol{Y}}$ се елиминираат редиците и колоните што одговараат на јазлите со позната ефективна вредност на напонот (PU, Slack) и за $\boldsymbol{B''}$ се имагинарниот дел со спротивен знак од вака добиената матрица $\underline{\boldsymbol{Y}}$

$$\boldsymbol{B'} = -\operatorname{Im}\left\{\underline{\boldsymbol{Y}}_{R=0;Y'=0}\right\}$$

$$B'_{ij} = B'_{ji} = -\sum_{j\in\beta_i}\frac{1}{X_{i-j}};\ i=1,\cdots,n-1;\ \ i\neq j$$

$$B'_{ii} = \sum_{j\in\alpha_i}\frac{1}{X_{i-j}};\ \ i=1,\cdots,n-1$$

$$\boldsymbol{B''} = -\operatorname{Im}\left\{\underline{\boldsymbol{Y}}_{R\neq 0;Y'\neq 0}\right\}$$

$$B''_{ij} = -B_{ij}\ \ ;\ \ i,j=1,\cdots,q$$

БРЗ МЕТОД СО РАЗДВОЈУВАЊЕ – ВЕРЗИЈА *BX*

- Матриците ***B'*** и ***B"*** во верзијата ***BX*** можат да се определат на следниот начин
  - Матрица ***B'***
    - сите елементи во мрежата во мрежата се претставуваат со π-еквивалентни шеми во кои **се занемарени напречните гранки**, а активните отпорности на редните гранки не се еднакви на нула (**$R_{i\text{-}j}\neq 0$**)
    - за така дефинираната мрежа се формира матрица на адмитанции на вообичаениот начин
    - од добиената матрица се елиминира (редуцира) редицата и колоната за јазолот со познат напон (редот на матрицата е за 1 помал од редот на матрицата $\underline{\boldsymbol{Y}}$
    - матрицата ***B'*** е со спротивен знак од имагинарниот дел на редуцираната матрица (со индекс $R\neq 0$; $Y'=0$)
  - Матрица ***B"***
    - сите елементи во мрежата во мрежата се претставуваат со π-еквивалентни шеми во кои **не се занемарени напречните гранки**, а активните отпорности на редните гранки **се еднакви на нула** (**$R_{i\text{-}j}\neq 0$**)
    - за така дефинираната мрежа се формира матрица на адмитанции на вообичаениот начин
    - од матрицата $\underline{\boldsymbol{Y}}$ се елиминираат редиците и колоните што одговараат на јазлите со позната ефективна вредност на напонот (PU, Slack) и за ***B"*** се имагинарниот дел со спротивен знак од вака добиената матрица (со индекс $R=0$; $Y'\neq 0$)

$$\boldsymbol{B}' = -\mathrm{Im}\left\{\underline{\boldsymbol{Y}}_{R\neq 0;Y'=0}\right\}$$

$$B'_{ij} = -B_{ij} \quad ; \quad i,j = 1,\cdots,n-1; \quad i\neq j$$

$$B'_{ii} = \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} B_{ij};\; i = 1,\cdots,n-1$$

$$\boldsymbol{B}'' = -\mathrm{Im}\left\{\underline{\boldsymbol{Y}}_{R=0;Y'\neq 0}\right\}$$

$$B''_{ij} = -\sum_{j\in\beta_i} \frac{1}{X_{i-j}} \quad ; \quad i,j = 1,\cdots,q; \quad i\neq j$$

$$B''_{ii} = \sum_{j\in\alpha_i} \frac{1}{X_{i-j}} - B_{i-0};\; i = 1,\cdots,q$$

СПОРЕДБА НА МЕТОДИТЕ

Резултати при за основните случаи

Број на јазли во мрежата	Број на итерации (ε= 0,0001 per unit)		
	Њутн-Рафсонов метод	Брз метод со раздвојување	
		Верзија ХВ	Верзија ВХ
14	3	4	4,5
30	3	3,5	4,5
57	3	4,5	4,5
118	3	4,5	4,5

Резултати при тројно поголеми активни отпорности

Број на јазли во мрежата	Број на итерации (ε= 0,0001 per unit)		
	Њутн-Рафсонов метод	Брз метод со раздвојување	
		Верзија ХВ	Верзија ВХ
14	3	17,5	6,5
30	4	19,5	7
57	3	14,5	9,5
118	4	19,5	7

Релативно време за пресметка

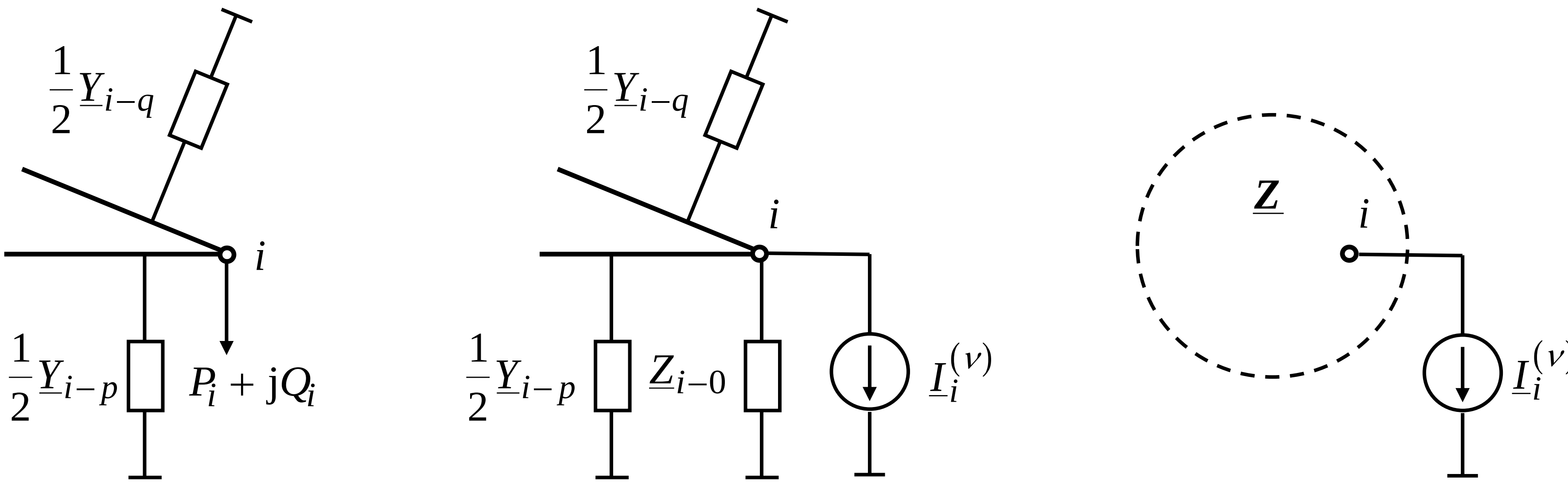
Тест-систем	Брз метод со раздвојување Верзија ХВ			Њутн-Рафсонов метод			Гаус-Зајделов метод
	LDLt	LU	INV_BT	LU	SLR_Gauss	INV_BT	
IEEE 14	1,00	1,00	1,20	3,00	3,10	4,05	4,35
IEEE 30	2,60	2,80	4,40	18,60	21,45	36,35	23,45
IEEE 57	10,65	11,70	24,80	127,15	235,05	245,25	108,70
IEEE 118	43,10	49,65	126,00	479,75	1017,25	1204,40	1428,95

Pentium 133 – 1,00 = 2 ms

МЕТОДИ СО МАТРИЦА $\underline{Z}$

– 1. метод – земјата е референтен јазол

- потрошувачите се моделираат со фиксни импеданции и струјни генератори со променлива вредност на струјата
- матрицата $\underline{Z}$ се формира уважувајќи ги и импеданциите на потрошувачите и напречните гранки од π-еквивалентните шеми на водовите и трансформаторите



$$\underline{I}_i^{(0)} = 0, \quad i = 1, \cdots, n-1$$

$$\underline{\mathbf{Z}}_{n-0} = \infty$$

$$\underline{U}_i^{(0)} = 1 + \mathrm{j}0, \quad i = 1, \cdots, n-1$$

$$\underline{Z}_{i-0} = \frac{U^2_{\text{ном.}}}{P_{i(\text{зададена})} - \mathrm{j}Q_{i(\text{зададена})}}, \qquad i = 1, \cdots, n-1$$

МЕТОДИ СО МАТРИЦА $\underline{Z}$

– 1. метод – земјата е референтен јазол

$$\begin{array}{ccccccc}
\underline{Z}_{11}\cdot\underline{I}_1^{(\nu)} & + & \underline{Z}_{12}\cdot\underline{I}_2^{(\nu)} & +\cdots+ & \underline{Z}_{1n}\cdot\underline{I}_n^{(\nu)} & = & \underline{U}_1^{(\nu+1)}\\
\underline{Z}_{21}\cdot\underline{I}_1^{(\nu)} & + & \underline{Z}_{22}\cdot\underline{I}_2^{(\nu)} & +\cdots+ & \underline{Z}_{2n}\cdot\underline{I}_n^{(\nu)} & = & \underline{U}_2^{(\nu+1)}\\
 & \vdots & & \vdots & & \vdots & \\
\underline{Z}_{k1}\cdot\underline{I}_1^{(\nu)} & + & \underline{Z}_{k2}\cdot\underline{I}_2^{(\nu)} & +\cdots+ & \underline{Z}_{kn}\cdot\underline{I}_n^{(\nu)} & = & \underline{U}_k^{(\nu+1)}\\
 & \vdots & & \vdots & & \vdots & \\
\underline{Z}_{n1}\cdot\underline{I}_1^{(\nu)} & + & \underline{Z}_{n2}\cdot\underline{I}_2^{(\nu)} & +\cdots+ & \underline{Z}_{nn}\cdot\underline{I}_n^{(\nu)} & = & \underline{U}_n
\end{array}$$

$$\underline{I}_n^{(\nu)}=\frac{\underline{U}_n-\sum_{j=1}^{n-1}\underline{Z}_{nj}\cdot I_j^{(\nu)}}{\underline{Z}_{nn}}$$

$$\underline{U}_i^{(\nu+1)}=\sum_{j=1}^{n}\underline{Z}_{ij}\cdot I_j^{(\nu)};\ i=1,\cdots,n-1$$

$$\max_i\left\{\left|\Delta\underline{U}_i^{(\nu+1)}\right|\right\}=\max_i\left\{\left|\underline{U}_i^{(\nu+1)}-\underline{U}_i^{(\nu)}\right|\right\}\le\varepsilon$$

$$\max_i\left\{\left|\mathrm{Re}\left(\Delta\underline{U}_i^{(\nu+1)}\right)\right|\right\}=\max_i\left\{\left|\mathrm{Re}\left(\underline{U}_i^{(\nu+1)}-\underline{U}_i^{(\nu)}\right)\right|\right\}\le\varepsilon$$

$$\max_i\left\{\left|\mathrm{Im}\left(\Delta\underline{U}_i^{(\nu+1)}\right)\right|\right\}=\max_i\left\{\left|\mathrm{Im}\left(\underline{U}_i^{(\nu+1)}-\underline{U}_i^{(\nu)}\right)\right|\right\}\le\varepsilon$$

МЕТОДИ СО МАТРИЦА $\underline{Z}$

– 1. метод – земјата е референтен јазол

$$P_{i-0}^{(\nu)} + \mathrm{j}Q_{i-0}^{(\nu)} = \frac{{U_i^{(\nu)}}^2}{\underline{Z}_{i-0}^*}, \quad i = 1, \cdots, n-1$$

$$\Delta P_i^{(\nu)} + \mathrm{j}\Delta Q_i^{(\nu)} = P_{i(\text{зададена})} + \mathrm{j}Q_{i(\text{зададена})} - P_{i-0}^{(\nu)} - \mathrm{j}Q_{i-0}^{(\nu)} - \underline{U}_i^{(\nu)} {\underline{I}_i^{(\nu)}}^*; \; i = 1, \cdots, n-1$$

$$\Delta P_i^{(\nu)} + \mathrm{j}\Delta Q_i^{(\nu)} = \underline{U}_i^{(\nu)} \cdot \Delta {\underline{I}_i^{(\nu)}}^*, \quad i = 1, \cdots, n-1$$

$$\Delta \underline{I}_i = \left(\frac{\Delta P_i^{(\nu)} + \mathrm{j}\Delta Q_i^{(\nu)}}{\underline{U}_i^{(\nu)}} \right)^*, \quad i = 1, \cdots, n-1$$

$$\underline{I}_i^{(\nu)} = \underline{I}_i^{(\nu)} + \Delta \underline{I}_i^{(\nu)}, \quad i = 1, \cdots, n-1$$

$$\underline{I}_n^{(\nu)} = \frac{\underline{U}_n - \sum_{j=1}^{n-1} \underline{Z}_{nj} \cdot \underline{I}_j^{(\nu)}}{\underline{Z}_{nn}}$$

$$\underline{U}_i^{(\nu+1)} = \sum_{j=1}^{n} \underline{Z}_{ij} \cdot \underline{I}_j^{(\nu)}; \; i = 1, \cdots, n-1$$

- Карактеристики
  + релативно добра конвергенција и за мрежи со негативни реактанции или импеданции еднакви на нула
  – голем број математички операции
  – постоењето на јазли со контролиран напон ја влошува конвергенцијата

МЕТОДИ СО МАТРИЦА $\underline{Z}$

- 2. метод – јазолот со познат напон (*slack*) е референтен јазол
  - потрошувачите се моделираат со струјни генератори со променлива вредност на струјата
  - матрицата $\underline{Z}$ се формира уважувајќи ги и импеданциите на потрошувачите и напречните гранки од π-еквивалентните шеми на водовите и трансформаторите, при што за референтен јазол се зема јазолот со познат напон
    - напоните што ќе се пресметаат од системот равенки за независни напони се во однос на јазолот со познат напон

$$\underline{U}_i^{(0)} = 1 + \mathrm{j}0, \quad i = 1, \cdots, n-1 \qquad \underline{I}_i^{(\nu+1)} = \frac{P_{i(\text{зададена})} - \mathrm{j}Q_{i(\text{зададена})}}{\underline{U}_i^{(\nu)}} - \underline{Y}_{i-0} \cdot \underline{U}_i^{(\nu)}, \qquad i = 1, \cdots, n-1$$

$$\underline{U}_i^{(\nu+1)} = \underline{U}_n + \sum_{j=1}^{n-1} \underline{Z}_{ij} \cdot \underline{I}_j^{(\nu+1)}, \quad i = 1, \cdots, n-1$$

$$\max_i \left\{ \left| \Delta \underline{U}_i^{(\nu+1)} \right| \right\} = \max_i \left\{ \left| \underline{U}_i^{(\nu+1)} - \underline{U}_i^{(\nu)} \right| \right\} \le \varepsilon$$

$$\max_i \left\{ \left| \mathrm{Re}\left(\Delta \underline{U}_i^{(\nu+1)} \right) \right| \right\} = \max_i \left\{ \left| \mathrm{Re}\left(\underline{U}_i^{(\nu+1)} - \underline{U}_i^{(\nu)} \right) \right| \right\} \le \varepsilon$$

$$\max_i \left\{ \left| \mathrm{Im}\left(\Delta \underline{U}_i^{(\nu+1)} \right) \right| \right\} = \max_i \left\{ \left| \mathrm{Im}\left(\underline{U}_i^{(\nu+1)} - \underline{U}_i^{(\nu)} \right) \right| \right\} \le \varepsilon$$

- Карактеристики
  - голем број математички операции
  - постоењето на јазли со контролиран напон ја влошува конвергенцијата