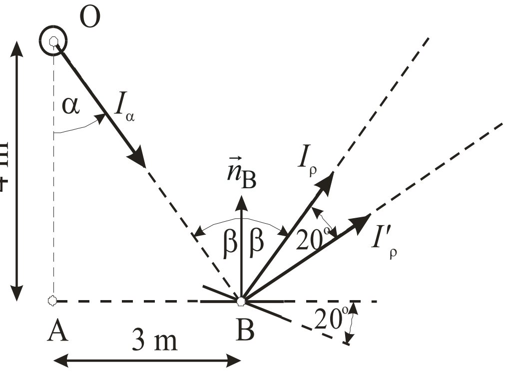
5.7.1

$$\Phi_{\text{свет.}} = 2\cdot 1060\ \text{lm};\ \delta = 20^\circ;\ \rho = 0{,}9$$

$$I_\rho = ?\ I'_\rho = ?$$

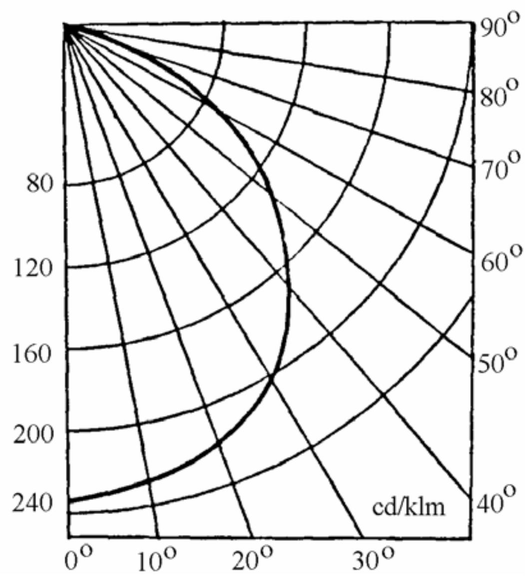
$$\alpha = \arctan\frac{3}{4} \approx 37^\circ$$



$$I_\rho = \rho\cdot I_\alpha$$

$$I_\alpha \approx 2\cdot 1{,}06\cdot 180 \approx 382\ \text{cd}$$

$$I_\rho = \rho\cdot I_\alpha = 0{,}9\cdot 382 \approx 344\ \text{cd}$$



$$I'_\rho = \rho\cdot I_\alpha = 0{,}9\cdot 382 \approx 344\ \text{cd}$$

5. 1

5.7.2

$$\beta = 70^\circ \quad n = 1{,}5 \quad \Phi_{\text{проп.}} = ?$$

$$n = \frac{\sin\beta}{\sin\gamma} \quad \gamma = \arcsin\frac{\sin\beta}{n} \approx 39^\circ$$

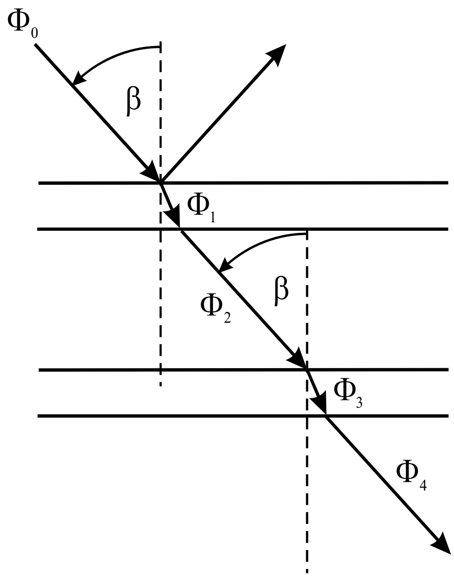
$$\Phi_4 = \tau\cdot\Phi_3 = \tau^2\cdot\Phi_2 = \tau^3\cdot\Phi_1 = \tau^4\cdot\Phi_0$$

$$\alpha = 0 \Rightarrow \tau = 1-\rho$$

$$\rho_1 = \rho_2 = \rho = \frac{1}{2}\cdot\left[\frac{\sin^2(\beta-\gamma)}{\sin^2(\beta+\gamma)} + \frac{\tan^2(\beta-\gamma)}{\tan^2(\beta+\gamma)}\right]$$

$$\rho = \frac{1}{2}\cdot\left[\frac{\sin^2 31}{\sin^2 109} + \frac{\tan^2 31}{\tan^2 109}\right] = 0{,}16975$$

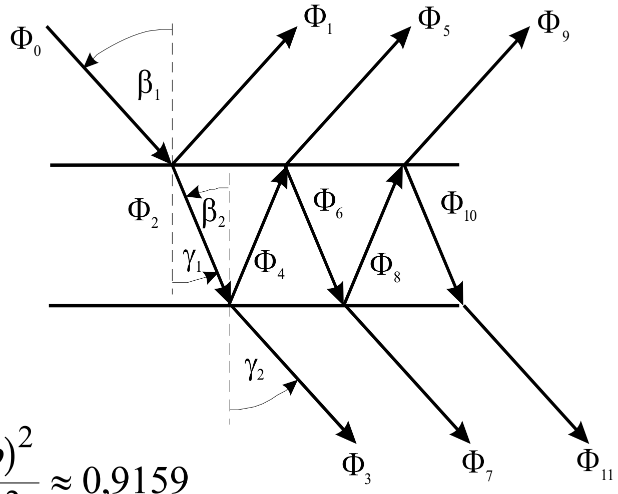
$$\Phi_4 = (1-0{,}16975)^4\cdot\Phi_0 = 0{,}475\cdot\Phi_0$$



5. 2

5.7.3

$\beta = 0^\circ \quad n = 1{,}53 \quad \varPhi_{\text{одб.}} = ? \quad \varPhi_{\text{проп.}} = ?$



$$\rho_{\text{екв.}} = \rho \cdot \left[1 + \frac{(1-\rho)^2}{1-\rho^2} \right]$$

$$\beta = 0^\circ \Rightarrow \gamma = 0^\circ \qquad \rho = \left(\frac{n-1}{n+1} \right)^2 = 0{,}0438845$$

$$\rho_{\text{екв.}} \approx 0{,}0841 \quad \varPhi_{\text{одб.}} = 8{,}4\% \cdot \varPhi_0$$

$$\tau_{\text{екв.}} = 1 - \rho_{\text{екв.}} = 0{,}9159 \tau_{\text{екв.}} = \frac{\varPhi_{\text{проп.}}}{\varPhi_0} = \frac{(1-\rho)^2}{1-\rho^2} \approx 0{,}9159$$

$$\varPhi_{\text{проп.}} = 91{,}6\% \cdot \varPhi_0$$

$$\beta = 45^\circ \Rightarrow \gamma \approx 28^\circ \rho = \frac{1}{2} \cdot \left[\frac{\sin^2 17^\circ}{\sin^2 73^\circ} + \frac{\tan^2 17^\circ}{\tan^2 73^\circ} \right] = 0{,}0511$$

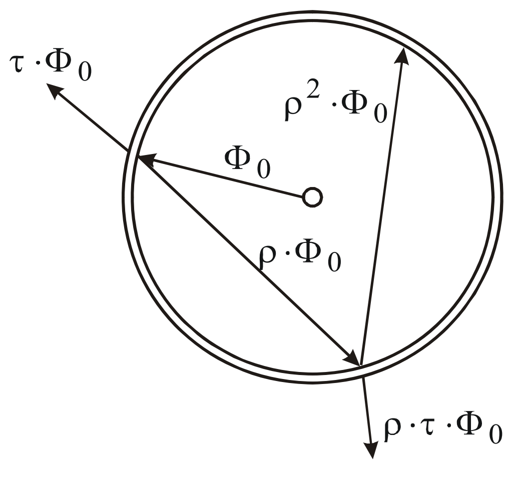
$$\rho_{\text{екв.}} = 0{,}0511 \cdot \left[1 + \frac{(1-0{,}0511)^2}{1-0{,}0511^2} \right] \approx 0{,}097 \tau_{\text{екв.}} = 1 - \rho_{\text{екв.}} = 0{,}903$$

5. 3

5.7.4

$\varPhi_{\text{извор}} = \varPhi_0 = 500 \text{ lm}; \; d = 0{,}2 \text{ m}; \; \rho = 0{,}6; \; \tau = 0{,}3$

$L_{\text{вн.}} = ? \;\; L_{\text{надв.}} = ?$



$$L_{\text{вн.}} = E_{\text{вн.}} \cdot \frac{\rho}{\pi} = \frac{\varPhi_{\text{вн.}}}{S_{\text{сфера}}} \cdot \frac{\rho}{\pi}$$

$$\varPhi_{\text{вн.}} = \varPhi_0 \cdot \frac{1}{1-\rho} = \frac{500}{1-0{,}6} = 1250 \text{ lm}$$

$$E_{\text{вн.}} = \frac{1250}{\pi \cdot 0{,}2^2} \approx 9947 \text{ lx}$$

$$L_{\text{вн.}} = 9947 \cdot \frac{0{,}6}{\pi} \approx 1900 \text{ cd}/\text{m}^2$$

$$L_{\text{надв.}} = E_{\text{вн.}} \cdot \frac{\tau}{\pi} = 9947 \cdot \frac{0{,}3}{\pi} \approx 950 \text{ cd}/\text{m}^2$$

$$I_{\text{надв.}} = \frac{\varPhi_{\text{надв.}}}{4 \cdot \pi} = \frac{\varPhi_{\text{вн.}} \cdot \tau}{4 \cdot \pi} = \frac{1250 \cdot 0{,}3}{4 \cdot \pi} \approx 29{,}8 \text{ cd}$$

$$L_{\text{надв.}} = \frac{I_{\text{надв.}}}{S_{\text{круг}}} = \cdot \frac{29{,}8}{\pi \cdot 0{,}1^2} \approx 950 \text{ cd}/\text{m}^2$$

5. 4

Задача 5.7.4а.

Светилката во вид на сфера од млечно стакло од задачата 5.7.4. е поставена на висина h=3 m над хоризонталната рамнина што ја осветлува. Проекцијата на центарот на светилката врз рамнината е точката A. Да се пресмета: а) осветленоста во точката A и осветленоста во точките B што се наоѓаат на растојание b=2 m од точката A; б) средната хоризонтална осветленост на кругот со центар во A и радиус b; в) на која висина треба да се постави светилката над рамнината за да осветленоста во точките B е најголема и колку изнесува осветленоста во точката A и точките B во овој случај.

Решение:

Флуксот што паѓа на внатрешната површина на сферата, уважувајќи го ефектот на повеќекратната рефлексија што се јавува во неа, е:

$$\Phi_{\text{vn.}} = \frac{\Phi_{\text{sij.}}}{1-\rho}\,.$$

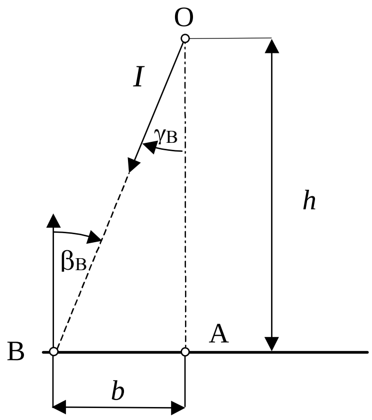
Млечното стакло дифузно ја пропушта светлината. Поради тоа, флуксот што светилката (сферата) го зрачи во целиот простор е:

$$\Phi_{\text{sfera}} = \tau\cdot\Phi_{\text{vn.}} = \frac{\tau}{1-\rho}\cdot\Phi_{\text{sij.}} = \frac{0.3}{1-0.6}\cdot 500 = 375\ \text{lm}$$

Бидејќи сјајноста на сферата е еднаква во сите правци (тела што пропуштаат дифузно зрачат според Ламбертовиот закон), светлинската јачина на сферата ќе биде еднаква во сите правци. Односно, флуксот што го зрачи сферата е рамномерно рапределен во целиот простор:

$$I = \frac{\Phi_{\text{sfera}}}{4\pi} = \frac{\tau}{1-\rho}\cdot\frac{\Phi_{\text{sij.}}}{4\pi} = \frac{375}{4\pi} = 29.8\ \text{cd}\,.$$

Осветленоста во точките на површината на осветлуваната рамнина може да се пресмета ако светилката се третира како точкаст извор. Тоа е оправдано затоа што растојанието од светилката до точките е поголемо од петкратната димензија на светилката.



Слика 1

а) Осветленоста во точката A е: $E_{\text{A}} = \dfrac{I\cdot\cos 0}{h^2} = \dfrac{29.8}{9} = 3.3\ \text{lx}\,.$

Осветленоста во точката B е: $E_{\text{B}} = \dfrac{I\cdot\cos\beta_{\text{B}}}{\overline{\text{OB}}^2} = \dfrac{I\cdot\cos^3\beta_{\text{B}}}{h^2}$.

Аголот β се пресметува од триаголникот ΔOAB :

$$\beta_{\text{B}} = \gamma_{\text{B}} = \arctan\frac{b}{h} = \arctan\frac{2}{3} \approx 34^\circ$$

$$E_{\text{B}} = \frac{29.8\cdot\cos^3 34}{3^2} = 1.9\ \text{lx}\,.$$

б) Средната осветленост на кругот со центар во A и радиус b се пресметува како количник помеѓу флуксот што паѓа на кругот и плоштината на кругот: $E_{\text{krug}} = \dfrac{\Phi_{\text{krug}}}{S_{\text{krug}}}$.

Флуксот што ќе падне на кругот е само дел од вкупниот флукс на светилката и е еднаков на флуксот што светилката го зрачи во просторниот агол дефиниран со конусот со врв во точката O и централен агол $2\gamma_{\text{B}}$:

$$\Phi_{\text{krug}} = \Phi_{\text{konus}} = \int_{\Omega_{\text{konus}}} I\cdot \mathrm{d}\Omega = I\int_0^{\gamma_{\text{B}}} 2\pi\sin\alpha\cdot\mathrm{d}\alpha = 2\pi\cdot I\cdot\left[-\cos\alpha\right]_0^{\gamma_{\text{B}}} = 2\pi\cdot I\cdot\left(1-\cos\gamma_{\text{B}}\right),$$

$$\Phi_{\text{krug}} = 2\pi\cdot I\cdot\left(1-\cos\gamma_{\text{B}}\right) = 2\pi\cdot 29.8\cdot\left(1-\cos 34^\circ\right) = 32\ \text{lm}\,.$$

Според тоа, средната осветленост на кругот е: $E_{\text{krug}} = \dfrac{\Phi_{\text{krug}}}{\pi\cdot b^2} = \dfrac{32}{\pi\cdot 2^2} = 2.5\ \text{lx}\,.$

в) Да претпоставиме дека височината поставување на светилката О треба да биде h_x за да се постигне максимална осветленост во точката (точките) В. Во тој случај, осветленоста во точката В ќе биде:

$$E_\mathrm{B} = f\left(h_x\right) = \frac{I \cdot \cos^3 \beta_x}{h_x^2} \ .$$

Осветленоста во точката В ќе биде максимална ако првиот извод на фунцијата $f\left(h_x\right)$ е еднаков на нула (лесно се покажува дека екстремот на фукнцијата е максимум, а не минимум). Меѓутоа, во претходниот израз и аголот β_x е функција од непознатата h_x, па поради тоа изразот за осветленоста ќе го напишеме во следниот облик:

$$E_\mathrm{B} = \frac{I \cdot \cos^3 \beta_x}{h_x^2} = \frac{I \cdot \cos \beta_x}{\overline{\mathrm{O}_x \mathrm{B}}^2} = \frac{I \cdot \cos \beta_x \cdot \sin^2 \gamma_x}{b^2} = \frac{I \cdot \cos \beta_x \cdot \sin^2 \beta_x}{b^2} \ .$$

$$\frac{\mathrm{d}E_\mathrm{B}}{\mathrm{d}\beta_x} = \frac{I}{b^2} \cdot \frac{\mathrm{d}\left(\cos \beta_x \cdot \sin^2 \beta_x\right)}{\mathrm{d}\beta_x} = \frac{I}{b^2} \cdot \left(-\sin^3 \beta_x + 2 \cdot \sin \beta_x \cdot \cos^2 \beta_x\right) \ .$$

Од релацијата $\frac{\mathrm{d}E_\mathrm{B}}{\mathrm{d}\beta_x} = 0$, се добива следната равенка:

$$\sin \beta_x \left(-\sin^2 \beta_x + 2 \cdot \cos^2 \beta_x\right) = 0 \ .$$

Првото решение на равенката е $\sin \beta_x = 0$, од каде што произлегува дека $h_x = \infty$ што не е можно како решение поради тоа што во тој случај осветленоста во точката В ќе биде еднаква на нула.

Од второто решение се добива:

$$-\sin^2 \beta_x + 2 \cdot \cos^2 \beta_x = 0 \ ,$$

$$\tan^2 \beta_x = 2$$

$$\beta_x = \arctan \sqrt{2} \approx 55^\circ$$

$$h_x = \frac{b}{\tan \beta_x} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} = 1.4142 \ \mathrm{m} \ .$$

Во овој случај осветленоста во точката А е:

$$E_\mathrm{A} = \frac{I \cdot \cos 0}{h_x^2} = \frac{29.8}{2} = 14.9 \ \mathrm{lx}$$

а осветленоста во точките В е:

$$E_\mathrm{B} = \frac{I \cdot \cos^3 \beta_x}{h_x^2} = \frac{29.8 \cdot \cos^3 55}{2} = 2.8 \ \mathrm{lx} \ .$$

Задача 5.7.4б.

Да се реши задачата 5.7.4.а ако сферата се замени светилка што зрачи според Ламбертовиот закон и нејзината оптичка оска поминува низ точката A (нормална на рамнината). Светлинската јачина на светилката во правец на оптичката оска е најголема и изнесува 29.8 cd.

Решение:

а)

$$E_{\mathrm{A}} = \frac{I_{0^\circ} \cdot \cos 0}{h^2} = \frac{I_0 \cdot \cos 0 \cdot \cos 0}{h^2} = \frac{29.8}{9} = 3.3\,\mathrm{lx}\,.$$

$$E_{\mathrm{B}} = \frac{I_{\gamma_{\mathrm{B}}} \cdot \cos\beta_{\mathrm{B}}}{\overline{\mathrm{OB}}^2} = \frac{I_0 \cdot \cos\gamma_{\mathrm{B}} \cdot \cos^3\beta_{\mathrm{B}}}{h^2} = 1.6\,\mathrm{lx}$$

б)

$$\Phi_{\mathrm{krug}} = \int\limits_{\Omega_{\mathrm{konus}}} I \cdot \mathrm{d}\Omega = \pi \cdot I_0 \int\limits_0^{\gamma_{\mathrm{B}}} 2 \cdot \cos\alpha \cdot \sin\alpha \cdot \mathrm{d}\alpha = \frac{\pi \cdot I_0}{2} \cdot \left(-\cos 2\alpha\right)\Big|_0^{\gamma_{\mathrm{B}}} = \frac{\pi \cdot I_0}{2} \cdot \left(1 - \cos 2\gamma_{\mathrm{B}}\right) = 29.3\,\mathrm{lm}$$

$$E_{\mathrm{krug}} = \frac{\Phi_{\mathrm{krug}}}{\pi \cdot b^2} = \frac{29.3}{\pi \cdot 2^2} = 2.3\,\mathrm{lx}$$

в)

$$E_{\mathrm{B}} = f\left(h_x\right) = \frac{I_0 \cdot \cos\gamma_x \cdot \cos^3\beta_x}{h_x^2}$$

$$E_{\mathrm{B}} = f\left(h_x\right) == \frac{I_0 \cdot \cos^2\beta_x \cdot \sin^2\beta_x}{b^2}$$

$$2 \cdot \sin\beta_x \cdot \cos\beta_x \left(-\sin^2\beta_x + \cos^2\beta_x\right) = 0$$

1° $\quad \sin 2\beta_x = 0$

2° $\quad \tan^2\beta_x = 1 \;\Rightarrow\; \beta_x = 45^\circ$

$$h_x = \frac{b}{\tan\beta_x} = \frac{2}{1} = 2\,\mathrm{m}$$

$$E_{\mathrm{A}} = \frac{I_0 \cdot \cos 0 \cdot \cos 0}{h_x^2} = \frac{29.8}{4} = 7.45\,\mathrm{lx}$$

$$E_{\mathrm{B}} = \frac{I_0 \cdot \cos\gamma_x \cdot \cos^3\beta_x}{h_x^2} = \frac{29.8 \cdot \cos 45 \cdot \cos^3 45}{4} = 3.73\,\mathrm{lx}$$