

Заземјувачи и заземјувачки системи во електроенергетските мрежи

Моделирање на заземјувачите со помош на компјутер

М. Тодоровски

Институт за преносни електроенергетски системи
Факултет за електротехника и информациски технологии
Универзитет Св. Кирил и Методиј

mirko@feit.ukim.edu.mk
pees.feit.ukim.edu.mk

Скопје, 2017

Основна задача на проектирањето на заземјувач

Основна задача при проектирањето и димензионирањето на заземјувачите е

- при однапред позната (дефинирана) струја на одведување I_Z ,
- при однапред позната специфична отпорност на земјата ρ и
- при однапред познато времетраење на струјата на грешка t ,

да се направи оптимален избор на заземјувач.

Оптималниот заземјувач треба да ги има следните одлики

- да ги задоволи ограничувањата за напоните на допир и чекор
- да биде економичен, т.е. да бидат потребни минимални инвестиции за неговата изведба

Решавање на заземјувач

Да се реши еден заземјувач значи да се определи отпорноста на распростирање R_Z и да се пресмета распределбата на потенцијалите $\varphi(x, y)$ по површината на земјата во неговата непосредна близина.

Постојат неколку начини на кои може да се реши заземјувач

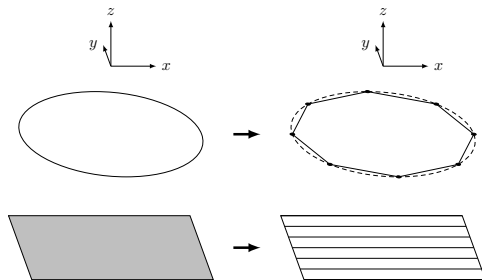
- со директни мерења на терен,
- со експериментирање на модели во лабораторија (електролитичка када),
- со пресметки.

Постојат повеќе нумерички постапки за решавање на заземјувачите

- потенцијален метод,
- методот на парцијални површини,
- емпириски формули.

Потенцијален метод – претпоставки

- Заземјувачот се состои од n праволиниски елементи-спроводници кои што се меѓусебно галвански поврзани;
- Заземјувачот е поставен во неограничена хомогена средина со позната специфична отпорност ρ .
- Должината на елементите е доволно мала така што може да се занемарат падовите на напони во нив и може да се смета дека сите n елементи од заземјувачот се наоѓаат на ист потенцијал.



Максвелови равенки

Разгледуваме заземјувач со n електроди од кои течат струи $I_1, I_2, \dots, I_k, \dots, I_n$.
Потенцијал на k -тата електрода

$$\varphi_k = r_{k1}I_1 + r_{k2}I_2 + \dots + r_{kk}I_k + \dots + r_{kn}I_n = \sum_{j=1}^n r_{kj}I_j.$$

r_{kj} – сопствени и меѓусебни отпорности

$$\varphi_1 = \varphi_2 = \dots = \varphi_k = \dots = \varphi_n = U_Z.$$

$$U_Z = r_{11}I_1 + r_{12}I_2 + \dots + r_{1n}I_n,$$

$$U_Z = r_{21}I_1 + r_{22}I_2 + \dots + r_{2n}I_n,$$

\vdots

$$U_Z = r_{n1}I_1 + r_{n2}I_2 + \dots + r_{nn}I_n.$$

$$\mathbf{E} \cdot U_Z = \mathbf{r} \cdot \mathbf{I}$$

$$\mathbf{E} = [1 \quad 1 \quad \dots \quad 1]^T$$

$$\mathbf{I} = [I_1 \quad I_2 \quad \dots \quad I_n]^T$$

Пресметка на R_Z , U_Z и I

$$\mathbf{E} \cdot U_Z = \mathbf{r} \cdot \mathbf{I}$$

$$I_Z = \mathbf{E}^T \cdot \mathbf{I}.$$

$$\mathbf{r}^{-1} \cdot \mathbf{E} \cdot U_Z = \mathbf{I}$$

$$\mathbf{E}^T \cdot \mathbf{r}^{-1} \cdot \mathbf{E} \cdot U_Z = \mathbf{E}^T \cdot \mathbf{I} = I_Z,$$

$$R_Z = \frac{U_Z}{I_Z} = \frac{1}{\mathbf{E}^T \cdot \mathbf{r}^{-1} \cdot \mathbf{E}}.$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{r}^{-1}$$

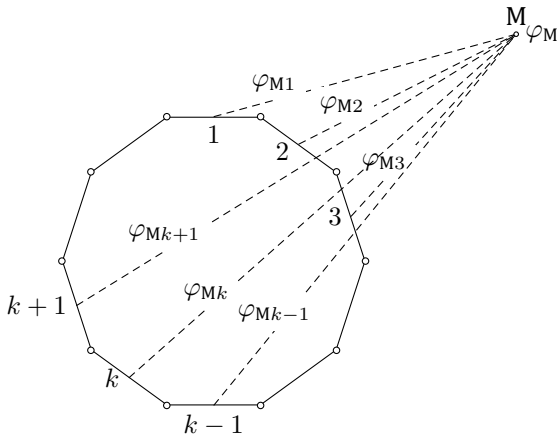
$$R_Z = \frac{1}{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n y_{ij}}.$$

$$U_Z = R_Z \cdot I_Z.$$

$$\mathbf{I} = \mathbf{r}^{-1} \cdot \mathbf{E} \cdot U_Z.$$

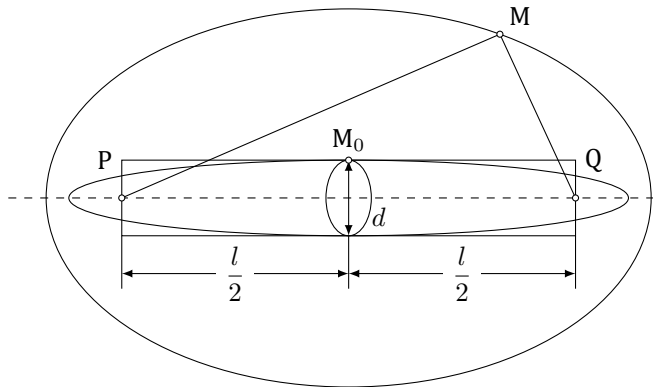
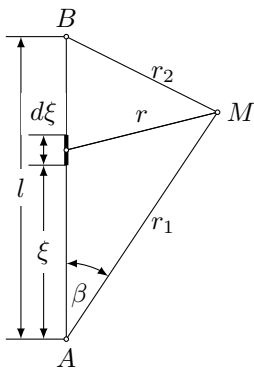
$$I_i = U_Z \cdot \sum_{j=1}^n y_{ij} = U_Z \cdot (y_{i1} + y_{i2} + \dots + y_{in}), \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

Потенцијал во точка



$$\begin{aligned}\varphi_M &= \sum_{i=1}^n r_{iM} \cdot I_i = \\ &= r_{1M} \cdot I_1 + r_{2M} \cdot I_2 + \cdots + r_{n-1M} \cdot I_{n-1} + r_{nM} \cdot I_n,\end{aligned}$$

Заемна отпорност помеѓу спроводник и точка



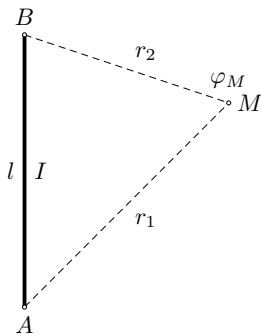
- $l \gg d$ спроводникот ќе го третираме како обртен елипсоид
- линиската густина на струјата по должината на спроводникот е константна I/l

Заемна отпорност помеѓу спроводник и точка

$$d\varphi_M = \frac{\rho}{4\pi} \cdot \frac{dI}{r} = \frac{\rho \cdot I}{4\pi \cdot l} \cdot \frac{d\xi}{r}$$

$$\alpha_M = \frac{\varphi_M}{I} = \frac{\rho}{4\pi \cdot l} \cdot \int_l \frac{d\xi}{r}$$

$$\alpha_M = \frac{\rho}{4\pi l} \cdot \ln \frac{r_1 + r_2 + l}{r_1 + r_2 - l}$$



Сопствена отпорност на спроводник

Точката ($M \equiv M_0$) е на самиот спроводник точно на неговата средина

$$\alpha_M = \frac{\varphi_M}{I} = \frac{\varphi}{I} \equiv \alpha_s.$$

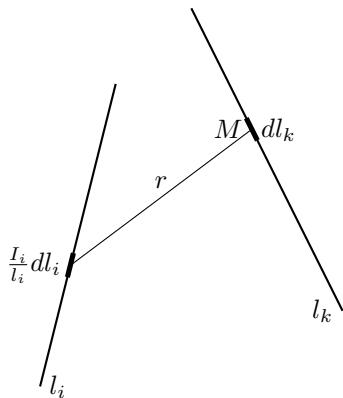
$$r_1 = r_2 = \sqrt{\left(\frac{l}{2}\right)^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{l^2 + d^2} = \frac{1}{2} \cdot l \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{d}{l}\right)^2}.$$

$$r_1 + r_2 = l \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{d}{l}\right)^2} \approx l \cdot \left(1 + \frac{1}{2} \frac{d^2}{l^2}\right) = l + \frac{d^2}{2l}.$$

$$\alpha_s = \frac{\rho}{4\pi l} \cdot \ln \frac{r_1 + r_2 + l}{r_1 + r_2 - l} = \frac{\rho}{4\pi l} \cdot \ln \frac{2l + d^2/2l}{d^2/2l} \approx \frac{\rho}{4\pi l} \cdot \ln \frac{4l^2}{d^2}$$

$$\alpha_s = \frac{\rho}{2\pi l} \cdot \ln \frac{2l}{d}.$$

Меѓусебна отпорност помеѓу два спроводника



Методот на средни потенцијали

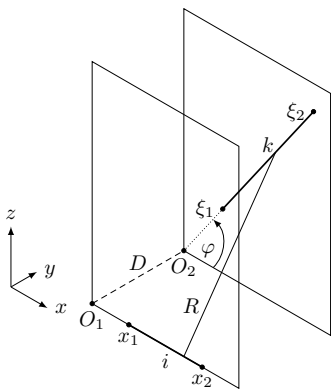
$$\varphi_{ik} = \frac{1}{l_k} \cdot \int_{l_k} \varphi_{iM} \cdot dl_k$$

$$\varphi_{iM} = \frac{\rho \cdot I_i}{4\pi \cdot l_i} \cdot \int_l \frac{dl_i}{r}$$

$$\alpha_{ik} = \frac{\varphi_{ik}}{I_i} = \frac{\rho}{4\pi \cdot l_i \cdot l_k} \cdot \int_{l_i} \int_{l_k} \frac{dl_i \cdot dl_k}{r}$$

Нојманов (Neumann) интеграл

Аналитичко решение на Нојмановиот интеграл



$$\int_{x_1}^{x_2} \int_{\xi_1}^{\xi_2} \frac{dx \cdot d\xi}{R} = P(x_1, \xi_1) + P(x_2, \xi_2) - P(x_1, \xi_2) - P(x_2, \xi_1),$$

$$P(x, \xi) = x \cdot \ln |\xi - x \cdot \cos \varphi + R| + \xi \cdot \ln |x - \xi \cdot \cos \varphi + R| + \frac{2D}{\sin \varphi} \cdot \operatorname{arctg} \left(\frac{x + \xi + R}{D} \cdot \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} \right),$$

$$R = R(x, \xi) = \sqrt{x^2 + \xi^2 + D^2 - 2 \cdot x \cdot \xi \cdot \cos \varphi}.$$

$$\varphi = 0: \quad P(x, \xi) = x \cdot \ln |\xi - x + R| + \xi \cdot \ln |x - \xi + R| + (x + \xi + R),$$

$$R = R(x, \xi) = \sqrt{(x - \xi)^2 + D^2}.$$

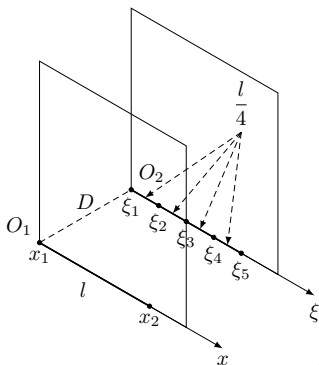
$$D = 0: \quad P(x, \xi) = x \cdot \ln |\xi - x \cdot \cos \varphi + R| + \xi \cdot \ln |x - \xi \cdot \cos \varphi + R|,$$

$$R = R(x, \xi) = \sqrt{x^2 + \xi^2 - 2 \cdot x \cdot \xi \cdot \cos \varphi}.$$

Нумеричко решение на Нојмановиот интеграл

Да се реши Нојмановиот интеграл, применувајќи го методот на средни потенцијали, како средна вредност од потенцијалите во $n_t = 5$ рамномерно распределени точки по должината на едниот од спроводниците. Бројни вредности: $l = 10$ m, $D = 2$ m, $\rho = 100$ Ω m.

$$\xi_j = \xi_1 + (j-1) \cdot \Delta\xi = \xi_1 + (j-1) \cdot \frac{l}{n_t-1} = 0 + (j-1) \cdot \frac{l}{n_t-1}, j = 1, 2, \dots, n_t$$



Нумеричко решение на Нојмановиот интеграл

$$j = 1; \quad \xi_1 = 0; \quad r_1 = D = 2 \text{ m}; \quad r_2 = \sqrt{D^2 + l^2} = 10,198 \text{ m};$$

$$\varphi_1 = \frac{\rho \cdot I}{4\pi l} \cdot \ln \frac{r_1 + r_2 + l}{r_1 + r_2 - l} = 1,840 \text{ V}.$$

j	ξ_j (m)	r_1 (m)	r_2 (m)	$r_1 + r_2$ (m)	φ_j (V)
1	0,00	2,000	10,198	12,198	1,840
2	2,50	3,202	7,762	10,964	2,451
3	5,00	5,385	5,385	10,770	2,622
4	7,50	7,762	3,202	10,964	2,451
5	10,00	10,198	2,000	12,198	1,840

$$\varphi_{sr.} = \frac{1}{n_t} \sum_{j=1}^{n_t} \varphi_j = \frac{1,840 + 2,451 + 2,622 + 2,451 + 1,840}{5} = 2,241 \text{ V}.$$

$$\alpha_m = 2,241 \Omega.$$

Пример 1

За претходниот пример да се направи програма во Matlab со која ќе се пресмета меѓусебната отпорност со нумеричко решавање на Нојмановиот интеграл. При тоа да се анализираат следните два случаја

- a) Пресметка на меѓусебната отпорност со методот на средни потенцијали со однапред зададен број на точки n_t , при што точките се рамномерно распределени по должината на вториот спроводник;
- б) Пресметка на меѓусебната отпорност со решавање на Нојмановиот интеграл со помош на функцијата `integral`.

Пример 1а

```
../programi/r_meg_2_lenti/par_lenti.m
```

```
1 function Z = par_lenti()
2 Z.rho = 100;
3 Z.L = [
4     0  0  -1  10  0  -1
5     0  2  -1  10  2  -1
6     ];
```

```
../programi/r_meg_2_lenti/r_meg_2_lenti_sum.m
```

```
1 function Rm = r_meg_2_lenti_sum(datoteka,nt)
2 Z = feval(datoteka); rho = Z.rho; L = Z.L;
3 [xp,yp,zp,xk,yk,zk] = ...
4     deal(L(:,1),L(:,2),L(:,3),L(:,4),L(:,5),L(:,6));
5 d1 = sqrt((xk(1)-xp(1))^2 + (yk(1)-yp(1))^2 + (zk(1)-zp(1))^2);
6 xt = linspace(xp(2),xk(2),nt);
7 yt = linspace(yp(2),yk(2),nt);
8 zt = linspace(zp(2),zk(2),nt);
9 r1 = sqrt((xp(1)-xt).^2 + (yp(1)-yt).^2 + (zp(1)-zt).^2);
10 r2 = sqrt((xk(1)-xt).^2 + (yk(1)-yt).^2 + (zk(1)-zt).^2);
11 fi = rho/(4*pi*d1)*log((r1+r2+d1)./(r1+r2-d1));
12 Rm = mean(fi);
```

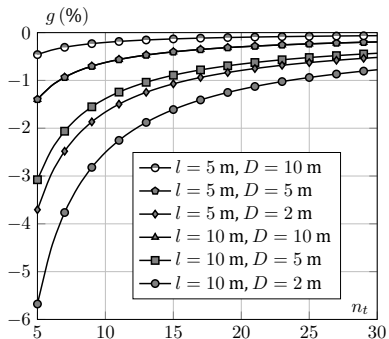
```
>> Rm = r_meg_2_lenti_sum('par_lenti',5)
```

```
Rm =
    2.2407
```


Пример 1а – грешка

../programi/r_meg_2_lenti/greska_nt.m

```
1 Rm_tocno = 2.3756;  
2 interval = 5:30;  
3 g = [];  
4 for nt = interval  
5     Rm = r_meg_2_lenti_sum('par_lenti',nt);  
6     g = [g (Rm/Rm_tocno - 1)*100];  
7 end  
8 plot(interval,g); grid;
```



Пример 16

$$\int_0^1 (ax^2 + 3x + b) dx,$$

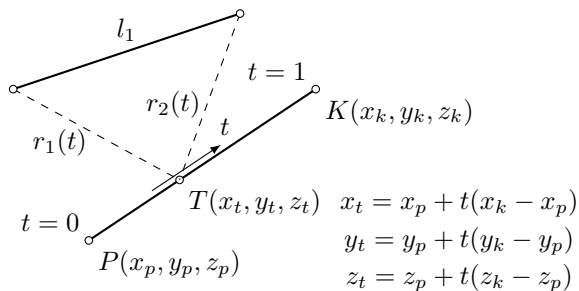
за $a = 2$ и $b = -1$ решението е $2/3 + 3/2 - 1 = 1,1667$.

```
../programi/r_meg_2_lenti/int_parabola.m
```

```
1 a = 2;  
2 b = -1;  
3 f = @(x) a*x.^2 + 3*x + b;  
4 I = integral(f,0,1)
```

```
>> int_parabola  
I =  
    1.1667
```

Пример 16



$$R_m = \frac{\rho}{4\pi l_1} \int_0^1 \ln \frac{r_1(t) + r_2(t) + l_1}{r_1(t) + r_2(t) - l_1} \cdot dt$$

Пример 16

```
../programi/r_meg_2_lenti/nojman_2_lenti.m
```

```
1 function I = nojman_2_lenti(t, xp, yp, zp, xk, yk, zk, d1)
2 xt = xp(2) + t*(xk(2)-xp(2));
3 yt = yp(2) + t*(yk(2)-yp(2));
4 zt = zp(2) + t*(zk(2)-zp(2));
5 dx1 = xt-xp(1);
6 dy1 = yt-yp(1);
7 dz1 = zt-zp(1);
8 dx2 = xt-xk(1);
9 dy2 = yt-yk(1);
10 dz2 = zt-zk(1);
11 r1 = sqrt(dx1.^2 + dy1.^2 + dz1.^2);
12 r2 = sqrt(dx2.^2 + dy2.^2 + dz2.^2);
13 I = log((r1+r2+d1)./(r1+r2-d1));
```

```
../programi/r_meg_2_lenti/r_meg_2_lenti_int.m
```

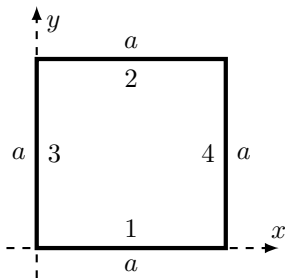
```
1 function Rm = r_meg_2_lenti_int(datoteka)
2 Z = feval(datoteka); rho = Z.rho; L = Z.L;
3 [xp,yp,zp,xk,yk,zk] = ...
4     deal(L(:,1),L(:,2),L(:,3),L(:,4),L(:,5),L(:,6));
5 d1 = sqrt((xk(1)-xp(1))^2 + (yk(1)-yp(1))^2 + (zk(1)-zp(1))^2);
6 f = @(t) nojman_2_lenti(t, xp, yp, zp, xk, yk, zk, d1);
7 Rm = rho/(4*pi*d1)*integral(f,0,1);
```

```
>> Rm = r_meg_2_lenti_int('par_lenti')
Rm =
    2.3756
```

Пример 2

Да се формира матрицата r на заземјувач во форма на квадрат со страница $a = 10$ m, поставен во неограничена хомогена спроводна средина со специфична отпорност $\rho = 100 \Omega\text{m}$. Заземјувачот е изведен од бакарно јаже со пресек $S = 50 \text{ mm}^2$ и пречник $d = 9 \text{ mm}$. Колкава ќе биде отпорноста на распространување на заземјувачот во наведените услови.

$$\alpha_s = \frac{\rho}{2\pi a} \cdot \ln \frac{2a}{d} = \frac{100}{2\pi \cdot 10} \cdot \ln \frac{2 \cdot 10}{9 \cdot 10^{-3}} = 12,2649 \Omega.$$



Пример 2 – меѓусебни отпорности

../programi/r_meg_2_lenti/kvadrat.m

```
1 function Z = kvadrat()
2 Z.rho = 100;
3 Z.L = [
4     0  0  -1  10  0  -1
5     0 10  -1  10  10  -1
6     0  0  -1  0  10  -1
7    10  0  -1  10  10  -1
8     ];
```

../programi/r_meg_2_lenti/r_meg_n_lenti.m

```
1 function R = r_meg_n_lenti(datoteka)
2 Z = feval(datoteka); rho = Z.rho; L = Z.L;
3 [xp,yp,zp,xk,yk,zk] = ...
4     deal(L(:,1),L(:,2),L(:,3),L(:,4),L(:,5),L(:,6));
5 n = length(xp);
6 R = zeros(n);
7 for i = 1:n
8     d1 = sqrt((xk(i)-xp(i))^2 + (yk(i)-yp(i))^2 + (zk(i)-zp(i))^2);
9     for j = i+1:n
10        k = [i j];
11        [xp1,yp1,zp1,xk1,yk1,zk1] = ...
12            deal(xp(k),yp(k),zp(k),xk(k),yk(k),zk(k));
13        f = @(t) nojman_2_lenti(t,xp1,yp1,zp1,xk1,yk1,zk1,d1);
14        R(i,j) = rho/(4*pi*d1)*integral(f,0,1);
15        R(j,i) = R(i,j);
16    end
17 end
```

Пример 2 – меѓусебни отпорности

```
>> R = r_meg_n_lenti_int('kvadrat')
```

```
R =
```

```
    0    0.7435    1.4027    1.4027
  0.7435    0    1.4027    1.4027
  1.4027    1.4027    0    0.7435
  1.4027    1.4027    0.7435    0
```

```
>> R = R + 12.2649*eye(4)
```

$$\mathbf{r} = \begin{bmatrix} 12,2649 & 0,7435 & 1,4027 & 1,4027 \\ 0,7435 & 12,2649 & 1,4027 & 1,4027 \\ 1,4027 & 1,4027 & 12,2649 & 0,7435 \\ 1,4027 & 1,4027 & 0,7435 & 12,2649 \end{bmatrix} \Omega$$

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 0,08371 & -0,00309 & -0,00869 & -0,00869 \\ -0,00309 & 0,08371 & -0,00869 & -0,00869 \\ -0,00869 & -0,00869 & 0,08371 & -0,00309 \\ -0,00869 & -0,00869 & -0,00309 & 0,08371 \end{bmatrix} \text{S}$$

$$R_Z = \frac{1}{\sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^4 y_{ij}} = \frac{1}{0,2529} = 3,954 \Omega.$$

Метод „лик во огледало“

- Реалните заземјувачи можат да бидат поставени само во ограничена средина, закопани во земјата на длабочина h под површината.
- Влијанието на површината на земјата се опфаќа со воведување на лик на заземјувачот поставен симетрично во однос на површината на земјата.
- Бидејќи имаме струи I_i и I'_i од елементот i и неговиот лик i' ($I_i = I'_i$) елементите r_{ij} ќе бидат

$$r_{ij} = \alpha_{ij} + \alpha_{i'j},$$

- Потенцијал во точката M

$$\varphi_{iM} = r_{iM} \cdot I_i = (\alpha_{iM} + \alpha_{i'M}) \cdot I_i.$$

- Потенцијал во точката M ако таа е на површината од земјата

$$\varphi_{iM} = r_{iM} \cdot I_i = 2 \cdot \alpha_{iM} \cdot I_i.$$

Пример 3

Заземјувачот во форма на квадрат да се реши за случајот кога е тој поставен во ограничена спроводна хомогена средина со специфична отпорност $\rho = 100 \Omega\text{m}$, закопан на длабочина $h = 1 \text{ m}$. Колкав е потенцијалот φ во тежиштето T од квадратот, а колкав во точката на површината од земјата T_0 над самото тежиште. *Бројни вредности:* $a = 10 \text{ m}$, $d = 9 \text{ mm}$, $h = 1 \text{ m}$, $I_Z = 10 \text{ A}$, $\rho = 100 \Omega\text{m}$.

```
../programi/zaz/kvadrat_d.m
```

```
1 function Z = kvadrat_d()
2 Z.Iz = 10;
3 Z.rho = 100;
4 Z.L = [
5     0  0  -1  10  0  -1  9
6     0 10  -1  10 10  -1  9
7     0  0  -1  0  10  -1  9
8    10  0  -1  10 10  -1  9
9     ];
```

Пример 3 – програма (1)

../programi/zaz/zaz.m

```
1 function [r,Rz,Uz,I,L] = zaz(datoteka)
2 if isstruct(datoteka)
3     Z = datoteka;
4 else
5     Z = feval(datoteka);
6 end
7 rho = Z.rho; L = Z.L; n = size(L,1);
8 L = [L; L];
9 L(n+1:end,[3 6]) = -L(n+1:end,[3 6]);
10 [xp,yp,zp,xk,yk,zk,dp] = ...
11     deal(L(:,1),L(:,2),L(:,3),L(:,4),L(:,5),L(:,6),L(:,7)/1000);
12 r = zeros(n,2*n);
13 rs = zeros(n,1);
14 for i = 1:n
15     dl = sqrt((xk(i)-xp(i))^2 + (yk(i)-yp(i))^2 + (zk(i)-zp(i))^2);
16     rs(i) = rho/(2*pi*d1)*log(2*d1/dp(i));
17     for j = i+1:2*n
18         k = [i j];
19         [xp1,yp1,zp1,xk1,yk1,zk1] = ...
20             deal(xp(k),yp(k),zp(k),xk(k),yk(k),zk(k));
21         f = @(t) nojman(t,xp1,yp1,zp1,xk1,yk1,zk1,d1);
22         r(i,j) = rho/(4*pi*d1)*integral(f,0,1);
23         if j<= n
24             r(j,i) = r(i,j);
25         end
26     end
27 end
```

Пример 3 – програма (2)

```
26     end
27 end
28 r = r(:,1:n) + r(:,n+1:end) + diag(rs);
29 Y = r^-1;
30 Rz = 1/sum(Y(:));
31 Uz = Rz*Z.Iz;
32 I = Uz*sum(Y,2);
```

Пример 3 – решение

```
>> r = zaz('kvadrat_d')
```

```
r =
```

```
14.6405    1.4742    2.5778    2.5778
 1.4742   14.6405    2.5778    2.5778
 2.5778    2.5778   14.6405    1.4742
 2.5778    2.5778    1.4742   14.6405
```

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 0,07254 & -0,00341 & -0,01106 & -0,01106 \\ -0,00341 & 0,07254 & -0,01106 & -0,01106 \\ -0,01106 & -0,01106 & 0,07254 & -0,00341 \\ -0,01106 & -0,01106 & -0,00341 & 0,07254 \end{bmatrix} \text{ S.}$$

$$\sum y_{ij} = 4 \cdot 0,07254 - 4 \cdot 0,00341 - 8 \cdot 0,01106 = 0,1881 \text{ S.}$$

$$R_Z = \frac{1}{0,1881} = 5,316 \Omega.$$

$$U_Z = R_Z \cdot I_Z = 5,316 \cdot 10 = 53,16 \text{ V.}$$

$$I_1 = U_Z \cdot \sum_{j=1}^4 y_{1j} = 53,16 \cdot (0,07254 - 0,00341 - 2 \cdot 0,01106) = 2,5 \text{ A.}$$

$$I_2 = I_3 = I_4 = I_1 = 2,5 \text{ A.}$$

Пример 3 – решение

$$r_1 = \sqrt{(0 - 5)^2 + (0 - 5)^2 + (-1 - (-1))^2} = 7,0711 \text{ m}$$

$$r_2 = \sqrt{(10 - 5)^2 + (0 - 5)^2 + (-1 - (-1))^2} = 7,0711 \text{ m}$$

$$\varphi_1 = \frac{\rho \cdot I_1}{4\pi l_1} \ln \frac{r_1 + r_2 + l_1}{r_1 + r_2 - l_1} = \frac{100 \cdot 2,5}{4\pi \cdot 10} \ln \frac{7,0711 + 7,0711 + 10}{7,0711 + 7,0711 - 10} = 3,5068 \text{ V,}$$

$$r_1 = \sqrt{(0 - 5)^2 + (0 - 5)^2 + (1 - (-1))^2} = 7,3485 \text{ m}$$

$$r_2 = \sqrt{(10 - 5)^2 + (0 - 5)^2 + (1 - (-1))^2} = 7,3485 \text{ m}$$

$$\varphi'_1 = \frac{\rho \cdot I_1}{4\pi l_1} \ln \frac{r_1 + r_2 + l_1}{r_1 + r_2 - l_1} = \frac{100 \cdot 2,5}{4\pi \cdot 10} \ln \frac{7,3485 + 7,3485 + 10}{7,3485 + 7,3485 - 10} = 3,3020 \text{ V}$$

$$\varphi_T = 4 \cdot (\varphi_1 + \varphi'_1) = 4 \cdot (3,5068 + 3,3020) = 27,2352 \text{ V.}$$

Пример 3 – решение

$$r_1 = \sqrt{(0 - 5)^2 + (0 - 5)^2 + (-1 - 0)^2} = 7,1414 \text{ m}$$

$$r_2 = \sqrt{(10 - 5)^2 + (0 - 5)^2 + (-1 - 0)^2} = 7,1414 \text{ m}$$

$$\varphi_0 = \frac{\rho \cdot I_1}{4\pi l_1} \ln \frac{r_1 + r_2 + l_1}{r_1 + r_2 - l_1} = \frac{100 \cdot 2,5}{4\pi \cdot 10} \ln \frac{7,1414 + 7,1414 + 10}{7,1414 + 7,1414 - 10} = 3,4520 \text{ V,}$$

$$\varphi_{T0} = 8 \cdot \varphi_0 = 8 \cdot 3,4520 = 27,6160 \text{ V.}$$

../programi/zaz/resi_kvadrat.m

```
1 [R,Rz,Uz,I,L] = zaz('kvadrat_d');
2 rho = 100;
3 T = [
4     5 5 -1
5     5 5 0
6     ];
7 I = [I; I];
8 for i=1:2
9     fi(i) = pot_tocka(T(i,:),I,L,rho);
10 end
11 fprintf('fi(%i) = %.4f V\n',[(1:2)' fi']');
```

```
>> resi_kvadrat
fi(1) = 27.2355 V
fi(2) = 27.6158 V
```

Потенцијал во точка

../programi/zaz/pot_tocka.m

```
1 function fi = pot_tocka(T,I,L,rho)
2   fi = 0;
3   n = size(L,1);
4   for i = 1:n
5       [P,Q] = deal(L(i,1:3),L(i,4:6));
6       d = norm(P-Q);
7       r1 = norm(P-T);
8       r2 = norm(Q-T);
9       fi = fi + rho*I(i)/(4*pi*d)*log((r1+r2+d)/(r1+r2-d));
10  end
```

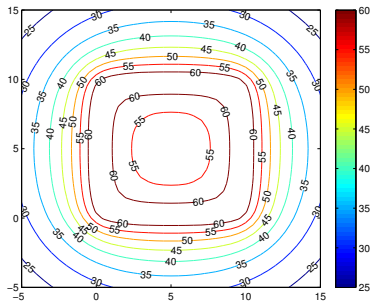
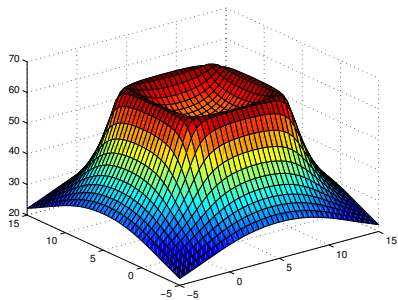
Пример 4

За заземјувачот од примерот 3 да се нацрта потенцијалната инка за потенцијалите на површината на земјата во областа $x \in [-5, 15]$ m и $y \in [-5, 15]$ m. Да се нацртаат и еквипотенцијалните линии во истата област. Потенцијалите да се изразат во проценти од напонот на заземјувачот.

```
../programi/zaz/kvadrat_inka.m
```

```
1 [R,Rz,Uz,I,L] = zaz('kvadrat_d');
2 I = [I; I];
3 rho = 100;
4 [X,Y] = meshgrid(-5:0.5:15,-5:0.5:15);
5 [m,n] = size(X);
6 fi = zeros(m,n);
7 for i = 1:m
8     for j = 1:n
9         T = [X(i,j) Y(i,j) 0];
10        fi(i,j) = pot_tocka(T,I,L,rho)/Uz*100;
11    end
12 end
13 figure; surf(X,Y,fi);
14 figure; [c,h] = contour(X,Y,fi,0:5:100); clabel(c,h); colorbar;
```


Пример 4

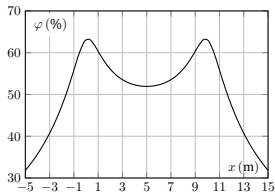


Пример 5

За заземјувачот од примерот 3 да се нацрта промената на потенцијалот на површината на земјата по права линија од точката (-5,5) до точката (15,5). Пресметките да се направат за 50 точки по должина на линијата, а потенцијалите да се изразат во проценти од напонот на заземјувачот.

```
../programi/zaz/kvadrat_potlin.m
```

```
1 [R,Rz,Uz,I,L] = zaz('kvadrat_d');  
2 I = [I; I];  
3 rho = 100;  
4 X = linspace(-5,15,50);  
5 for i = 1:50  
6     fi(i) = pot_tocka([X(i) 5 0],I,L,rho)/Uz*100;  
7 end  
8 plot(X,fi); grid
```

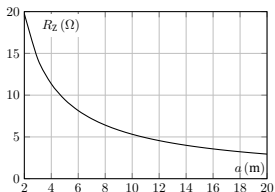


Пример 6

За заземјувач во форма на квадрат поставен во тло со $\rho = 100 \Omega\text{m}$ да се нацрта зависноста на отпорноста R_Z во функција од должината на страната на квадратот a . Да се земе дека a се менува од 2 m до 20 m со чекор од 1 m.

```
../programi/zaz/kvadrat_promenliv.m
```

```
1 Z = feval('kvadrat_d');  
2 i = find(Z.L == 10);  
3 Rz_site = [];  
4 for a = 2:20  
5     Z.L(i) = a;  
6     [R, Rz] = zaz(Z);  
7     Rz_site = [Rz_site; Rz];  
8 end  
9 plot(2:20,Rz_site); grid
```



Пример 7

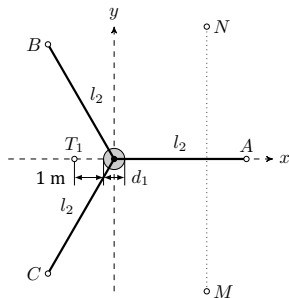
Еден армирано-бетонски столб од надземен вод е поставен во тло со специфична отпорност $\rho = 180 \Omega\text{m}$. Должината на делот од столбот закопан во земјата изнесува $l_1 = 2 \text{ m}$ и тој може да се еквивалентира со метален цилиндер со пречник $d_1 = 30 \text{ cm}$. столбот е заземјен со 3 поцинкувани ленти закопани на длабочина $h = 1 \text{ m}$. Лентите формираат симетрична ѕвезда, нивната должина е $l_2 = 10 \text{ m}$ и тие се со димензии $30 \times 4 \text{ mm}$ ($d_2 = 22 \text{ mm}$). Во заземјувачот се инјектира струја на грешка $I_Z = 240 \text{ A}$.

За заземјувачот се познати матриците

$$\mathbf{r} = \begin{bmatrix} 47,0 & 9,1 & 9,1 & 9,1 \\ 9,1 & 23,8 & 4,1 & 4,1 \\ 9,1 & 4,1 & 23,8 & 4,1 \\ 9,1 & 4,1 & 4,1 & 23,8 \end{bmatrix} \Omega; \quad \mathbf{y} = \begin{bmatrix} 25 & -7 & -7 & -7 \\ -7 & 46 & -4 & -4 \\ -7 & -4 & 46 & -4 \\ -7 & -4 & -4 & 46 \end{bmatrix} \cdot 10^{-3} \text{ S},$$

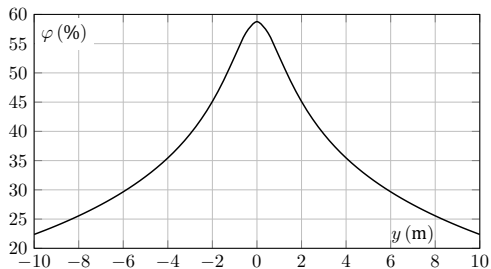
во кои првата редица и колона се однесуваат на делот од столбот закопан во земјата.

Пример 7



- Отпорноста на распростирање R_Z и напонот на заземјувачот U_Z ,
- Струите на одведување во земјата од одделните електроди на заземјувачот,
- Напонот на допир во точката T_1 на површината на земјата која се наоѓа на оддалеченост од 1 m од работ на столбот. Да се земе предвид и пречникот на столбот,
- Да се пресмета веројатноста за смртен исход за човек кој е изложен на напон на допир во точката T_1 ако времето на реагирање на заштитата е 0,4 секунди. Отпорноста на човекот изнесува 1000Ω ,
- Најголемиот напон на чекор ако е позната промената на потенцијалот на површината на земјата по правецот $M - N$, при што координатите на точките се $M(7, -10)$ и $N(7, 10)$. Кривата на промена на потенцијалот е прикажана на сликата, а бројните вредности се дадени во табелата,
- Напонот на заземјувачот во случајот кога заземјувачот би имал само една лента наместо

Пример 7



y (m)	0	0,5	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0	3,5	4,0	4,5	5,0
φ (%)	58,8	56,8	52,8	48,7	45,1	42,1	39,5	37,4	35,5	33,8	32,3
y (m)	5,5	6,0	6,5	7,0	7,5	8,0	8,5	9,0	9,5	10,0	
φ (%)	30,9	29,7	28,5	27,5	26,5	25,6	24,7	23,9	23,1	22,4	

Пример 7а,б

$$R_Z = \frac{1}{\sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^4 y_{ij}} = \frac{1}{(25 + 3 \cdot 46 - 6 \cdot 7 - 6 \cdot 4) \cdot 10^{-3}} = 10,309 \Omega,$$

$$U_Z = R_Z \cdot I_Z = 10,309 \cdot 240 = 2474,227 \text{ V.}$$

$$\mathbf{I} = \mathbf{y} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot U_Z = \begin{bmatrix} 25 - 7 - 7 - 7 \\ 46 - 7 - 4 - 4 \\ 46 - 7 - 4 - 4 \\ 46 - 7 - 4 - 4 \end{bmatrix} \cdot 10^{-3} \cdot 2474,227 = \begin{bmatrix} 9,897 \\ 76,701 \\ 76,701 \\ 76,701 \end{bmatrix} \text{ A.}$$

Пример 7в

$$r_1 = \sqrt{(0 - (-1.15))^2 + (0 - 0)^2 + (0 - 0)^2} = 1,15 \text{ m,}$$

$$r_2 = \sqrt{(0 - (-1.15))^2 + (0 - 0)^2 + (-2 - 0)^2} = 2,307 \text{ m,}$$

$$\varphi_1 = \frac{\rho \cdot I_1}{4\pi l_1} \ln \frac{r_1 + r_2 + l_1}{r_1 + r_2 - l_1} = \frac{180 \cdot 9,897}{4\pi \cdot 2} \ln \frac{1,15 + 2,307 + 2}{1,15 + 2,307 - 2} = 93,601 \text{ V.}$$

$$r_1 = \sqrt{(0 - (-1.15))^2 + (0 - 0)^2 + (-1 - 0)^2} = 1,524 \text{ m,}$$

$$r_2 = \sqrt{(10 - (-1.15))^2 + (0 - 0)^2 + (-1 - 0)^2} = 11,195 \text{ m,}$$

$$\varphi_2 = \frac{\rho \cdot I_2}{4\pi l_2} \ln \frac{r_1 + r_2 + l_2}{r_1 + r_2 - l_2} = \frac{180 \cdot 76,701}{4\pi \cdot 10} \ln \frac{1,524 + 11,195 + 10}{1,524 + 11,195 - 10} = 233,239 \text{ V.}$$

$$r_1 = \sqrt{(0 - (-1.15))^2 + (0 - 0)^2 + (-1 - 0)^2} = 1,524 \text{ m,}$$

$$r_2 = \sqrt{(-5 - (-1.15))^2 + (5\sqrt{3} - 0)^2 + (-1 - 0)^2} = 9,53 \text{ m,}$$

$$\varphi_3 = \frac{\rho \cdot I_3}{4\pi l_2} \ln \frac{r_1 + r_2 + l_2}{r_1 + r_2 - l_2} = \frac{180 \cdot 76,701}{4\pi \cdot 2} \ln \frac{1,524 + 9,53 + 2}{1,524 + 9,53 - 2} = 328,994 \text{ V.}$$

$$\varphi = 2 \cdot \varphi_1 + 2 \cdot \varphi_2 + 4 \cdot \varphi_3 = 2 \cdot 93,601 + 2 \cdot 233,239 + 4 \cdot 328,994 = 1969,656 \text{ V.}$$

$$U_d = \frac{U_Z - \varphi}{1 + 1,5 \cdot 10^{-3} \cdot \rho} = \frac{2474,227 - 1969,656}{1 + 1,5 \cdot 10^{-3} \cdot 180} = 397,3 \text{ V.}$$

Пример 7г

$$I = \frac{397,3}{1000} = 397,3 \text{ mA},$$

$$I_{F50} = \frac{0,16}{0,4} = 400 \text{ mA}.$$

$$x = \frac{1}{0,18} \log \frac{I}{I_{F50}} = \frac{1}{0,18} \log \frac{397,3}{400} = -0,0163,$$

$$p = F(x) = 0,5$$

Пример 7д

$$\Delta\varphi_1 = \varphi(y=0) - \varphi(y=1) = 58,8 - 52,8 = 6 \%,$$

$$\Delta\varphi_2 = \varphi(y=0,5) - \varphi(y=1,5) = 56,8 - 48,7 = 8,1 \%,$$

$$\Delta\varphi_3 = \varphi(y=1) - \varphi(y=2) = 52,8 - 45,1 = 7,7 \%,$$

$$\Delta\varphi_4 = \varphi(y=1,5) - \varphi(y=2,5) = 48,7 - 42,1 = 6,6 \%,$$

⋮

$$E_c = \frac{8,1}{100} \cdot U_Z = \frac{8,1}{100} \cdot 2474,227 = 200,412 \text{ V},$$

$$U_c = \frac{E_c}{1 + 6 \cdot 10^{-3} \cdot \rho} = \frac{200,412}{1 + 6 \cdot 10^{-3} \cdot 180} = 96,352 \text{ V}.$$

Пример 7г

$$\mathbf{r} = \begin{bmatrix} 47,0 & 9,1 \\ 9,1 & 23,8 \end{bmatrix} \Omega,$$

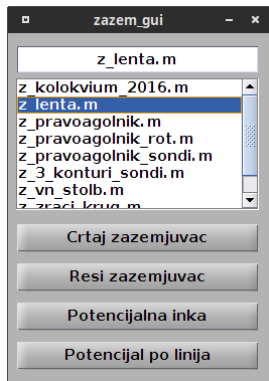
$$\mathbf{y} = \mathbf{r}^{-1} = \begin{bmatrix} 0,023 & -0,009 \\ -0,009 & 0,045 \end{bmatrix} \text{ S.}$$

$$R_Z = \frac{1}{(23 + 45 - 2 \cdot 9) \cdot 10^{-3}} = 20 \Omega,$$

$$U_Z = R_Z \cdot I_Z = 20 \cdot 240 = 4800 \text{ V.}$$

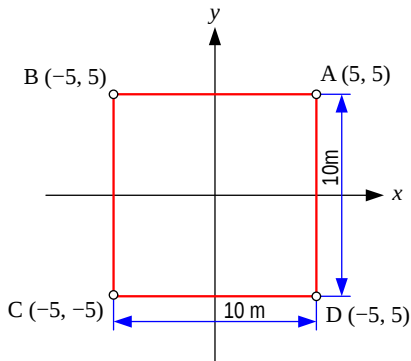
Програма за решавање заземјувачи

<http://pees.feit.ukim.edu.mk/predmeti/zzs/zazem.zip>



Задачи

Задача 1. Да се формира матрицата r на заземјувач во форма на квадрат со страница $a = 10$ m, поставен на длабочина $h = 0,5$ m во хомогена спроводна средина со специфична отпорност $\rho = 100$ Ω m. Заземјувачот е изведен од бакарно јаже со пресек 50 mm² и пречник $d = 9$ mm. Колкава ќе биде отпорноста на распространување на заземјувачот во наведените услови? Колкави струи се одведуваат во земјата од секоја одделна страна на квадратот?



Задачи

Задача 2. Да се повторат пресметките од задачата 1 за случајот кога заземјувачот е изведен од бакарно јаже со пресек 70 mm^2 и пречник $d = 11 \text{ mm}$. За колку проценти е намалена отпорноста на распростирање во овој случај?

Задача 3. Да се повторат пресметките од задачата 1 за случајот кога заземјувачот е поставен на длабочина $h = 1 \text{ m}$. За колку проценти е намалена отпорноста на распростирање во овој случај?

Задача 4. Да се одреди зависноста на отпорот на распростирање од должината на страната a на заземјувачот од задачата 1. Зависноста да се нацрта за вредности на a од множеството $\{5, 10, 15 \text{ и } 20 \text{ m}\}$.

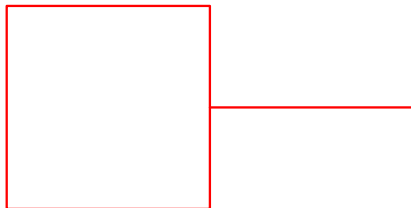
Задача 5. Да се повторат пресметките од задачата 1 за случајот кога заземјувачот е изведен во форма на правоаголник со димензии на страните од $12,5 \text{ m}$ и 8 m (повторно опфаќа површина од 100 m^2). Што се случува со отпорноста на распростирање и струите на одведување од елементите на заземјувачот?

Задачи

Задача 6. За подобрување на карактеристиките на заземјувачот од задачата 1 е предложено да се стави уште една дополнителна електрода со должина од 10 m како на сликата. Да се испита која од двете варијанти е подобра во поглед на отпорноста на распростирање и струите на одведување од неговите елементите.



а)



б)

Пример 8

Заземјувач со должина $l = 10$ m, изработен од бакарно јаже со пречник $d = 9$ mm се наоѓа во неограничена средина со $\rho = 100 \Omega\text{m}$. Струјата на одведување е $I_Z = 10$ A. Да се пресмета R_Z и распределбата на потенцијалите во околината заземјувачот. Колкава ќе биде отпорноста R'_Z ако се зголеми пречникот на заземјувачот на вредност $d' = 200$ mm?

$$R_Z = \frac{\rho}{2\pi \cdot l} \cdot \ln \frac{2l}{d} = \frac{100}{2\pi \cdot 10} \cdot \ln \frac{2 \cdot 10}{0,009} = 12,265 \Omega.$$

$$U_Z = R_Z \cdot I_Z = 12,265 \cdot 10 = 122,65 \text{ V}.$$

Еквипотенцијалните линии се геометриско место на точки за кои важи

$$\varphi = \frac{\rho \cdot I_Z}{4\pi l} \cdot \ln \frac{R_1 + R_2 + l}{R_1 + R_2 - l} = \text{const} \quad \leftarrow \quad \text{елипса}$$

$$R_1 + R_2 = \frac{K + 1}{K - 1} \cdot l = \text{const.};$$

$$K = \exp\left(\frac{4\pi l \cdot \varphi}{\rho \cdot I_Z}\right).$$

Пример 8

Фокусите на елипсата се $(-c, 0)$ и $(c, 0)$ каде што $c = l/2$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

$$R_1 + R_2 = 2a,$$

$$b^2 = a^2 - c^2.$$

$$a = \frac{K+1}{K-1} \cdot \frac{l}{2},$$

$$b = \frac{2\sqrt{K}}{K-1} \cdot \frac{l}{2}.$$

Равенка на елипсата

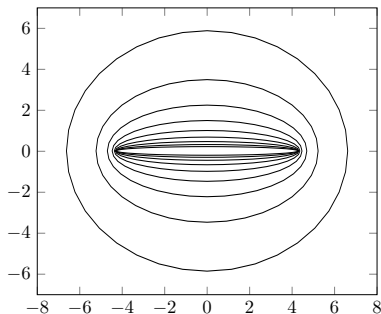
$$x = a \cdot \cos \alpha,$$

$$y = b \cdot \sin \alpha, \quad 0^\circ \leq \alpha \leq 360^\circ$$

Пример 8

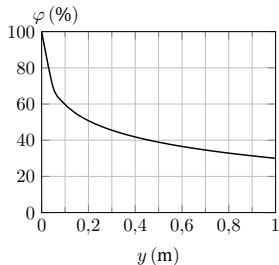
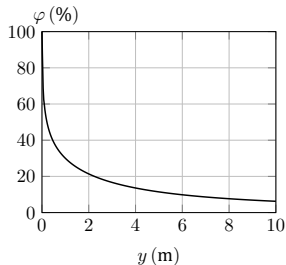
../programi/primeri/primer_1.m

```
1 l = 10; rho = 100; Iz = 10; Uz = 122.65;
2 figure; axis equal; hold on
3 for fi = 10:5:50
4     K = exp(4*pi*l*(fi/100*Uz)/(rho*Iz));
5     a = (K + 1)/(K - 1)*l/2;
6     b = 2*sqrt(K)/(K - 1)*l/2;
7     alfa = (0:10:360)/180*pi;
8     x = a*cos(alfa);
9     y = b*sin(alfa);
10    plot(x,y,'-k');
11 end
12 xlim([-8 8]); ylim([-7 7]);
```



густината на екивпотенцијалните линии е најголема во непосредна близина околу заземјувачот

Пример 8



- На растојание $y = 0,1$ m од заземјувачот φ паѓа на 60% од U_Z . Тоа значи дека 40% од отпорот со кој земјиштето се спротивставува на одведувањето на струјата отпаѓа на првите 10 cm околу заземјувачот.
- Ако го зголемиме пречникот на заземјувачот на вредноста $d' = 20$ cm, тогаш φ на заземјувачот ќе биде $\varphi = 0,6 \cdot U_Z$, без да дојде до промена на струјата и промена на потенцијалите во преостанатиот околн простор.
- Со таквото зголемување на пречникот сме совладале 40% од отпорот со кој тлото се спротивставува на течењето на струјата, т.е. сме ја намалиле отпорноста на распростирање на заземјувачот за 40%.

Пример 8

$$R'_Z = \frac{\rho}{2\pi \cdot l} \cdot \ln \frac{2l}{d'} = \frac{100}{2\pi \cdot 10} \cdot \ln \frac{2 \cdot 10}{0,2} = 7,329 \Omega \approx 0,6 \cdot R_Z.$$

- Намалувањето на отпорноста на заземјувачите со зголемување на нивниот пречник е скап и непрактичен. Но од оваа анализа произлегува еден многу важен заклучок.
- За намалување на R_Z многу важен фактор е квалитетот на земјиштето во околината на заземјувачот, особено во првите десетина cm околу електродите.
- За намалување на R_Z се применуваат материјали со ниско ρ : бентонит со $\rho = 3 \div 8 \Omega\text{m}$ или ситна просеана хумусна земја или глина со слој од најмалку 10 cm.